Aeronaves y Vehículos Espaciales

Tema 8 – Mecánica Orbital

Sergio Esteban Roncero
Francisco Gavilán Jiménez

Departamento de Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos
Escuela Superior de Ingenieros
Universidad de Sevilla

Curso 2009-2010

Outline

- Introducción.
- Ley de gravitación universal.
- El problema de un cuerpo.
- Velocidades cosmonáuticas características.
- Orbitas terrestres.

Introducción a la Mecánica Orbital

- Históricamente Newton desarrolló la Ley de la Gravitación Universal a partir de las Leyes de Kepler (y de sus Leyes de la Mecánica).
- A partir de la Ley de la Gravitación se van a derivar las ecuaciones del movimiento orbital:
  - posteriormente se demostrarán las Leyes de Kepler.
- Dos maneras distinta de abordar los problemas de mecánica orbital:
  - problema *directo:*
    - dada la fuerza se calcula el movimiento (problema que también resolvió Newton),
      - Leyes de Newton
  - problema *inverso:*
    - en contraposición al problema *inverso*, en el que dado el movimiento se calcula la fuerza que lo produce.
      - leyes cinemáticas de Kepler

Introducción a la Mecánica Orbital

- Se considerará el movimiento orbital de un cuerpo en el caso en que solamente depende del campo gravitatorio producido por otro y que éste tiene una masa mucho mayor (**problema de un cuerpo**).
- Se desprecian los efectos:
  - la influencia que pudieran tener otros cuerpos
  - el efecto de otras fuerzas que pudiesen actuar
    - la resistencia atmosférica o la presión de radiación solar.
- Se considera que el campo gravitatorio es un campo de fuerzas central, inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que separa a ambos cuerpos
  - Se desprecia cualquier perturbación gravitatoria asociada a la falta de simetría esférica del cuerpo
    - estas perturbaciones deben ser tenidas en cuenta en algunas misiones espaciales:
      - satélites de navegación de alta precisión.

Ley de gravitación universal - I

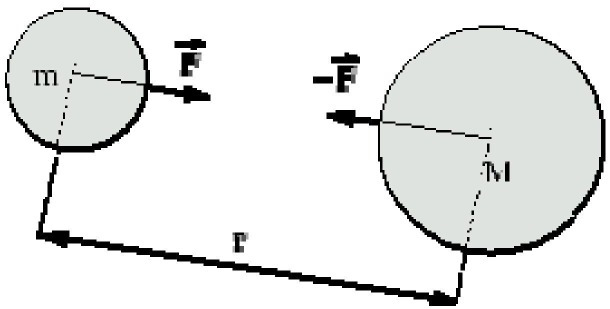
- La ley de la gravitación universal establece que la fuerza gravitatoria ejercida por una masa puntual M sobre otra masa puntual m viene dada por la ecuación

Fuerza gravitatoria

Radio del vector que une los dos cuerpos

$$\vec{F}_g = -G\frac{Mm}{r^3}\vec{r},$$

constante de gravitación universal



Módulo de fuerza de atracción

Parámetro de Gravitación

$$F_g = G\frac{Mm}{r^2} = \mu\frac{m}{r^2}, \qquad \mu = GM$$

- El parámetro de Gravitación es una característica del cuerpo atractor

Propiedades Gravitacionales

Sun:

Mean radius	$6.9599\ 10^5$ km
Mass	$1.990\ 10^{30}$ kg
Mean density	1.409 g cm^{-3}
Gravitational parameter	$1.32712\ 10^{11}$ km^3 s^{-2}
Inclination of equator to ecliptic	$7°15'$
Rotation period (at 17° latitude)	25.38 days
Gravitational acceleration at surface	273.97 m s^{-2}
Centrifugal acceleration at surface	0.0057 m s^{-2}
Radiation emitted	$3.826\ 10^{26}$ W
Solar constant	1360 W m^{-2}
Effective blackbody temperature	5760 K

Earth:

Mean equatorial radius	
Polar radius (based on spheroid)	6356.755 km
Mass	$5.976\ 10^{24}$ kg
Mean density	5.517 g cm^{-3}
Gravitational parameter	$3.986013\ 10^5$ km^3 s^{-2}
Obliquity of ecliptic	$23°27'8.26''–46.86''$ T*
Gravitational acceleration at equator	9.8142 m s^{-2}
Equatorial rotational velocity	0.4651 km s^{-1}
Centrifugal acceleration at equator	0.0339 m s^{-2}
International standard gravity	9.80665 m s^{-2}
Escape velocity at equator	11.19 km s^{-1}
Sun–earth distance, minimum	$1.4710\ 10^8$ km
maximum	$1.5210\ 10^8$ km

Moon:

Mean radius	1738.2 km
Mass	$7.350\ 10^{22}$ kg
Mean density	3.341 g cm^{-3}
Gravitational parameter	$4.90265\ 10^3$ km^3 s^{-2}
Mean orbital inclination to ecliptic	$5°8'43''$
Mean equatorial inclination to ecliptic	$1°32'30''$
Rotation period	27.32166 d_E
Gravitational acceleration at surface	1.62 m s^{-2}
Escape velocity at surface	2.38 km s^{-1}
Earth–moon distance, minimum	356 400 km
maximum	406 700 km

*T is in centuries from the year 1900.

Ley de gravitación universal - II

- Se trata de un campo de fuerzas central
  - la línea de acción de la fuerza pasa siempre por un punto fijo o centro
  - su módulo es función de la distancia a ese punto fijo
  - el movimiento del cuerpo (*m*) tiene lugar en un *plano*.

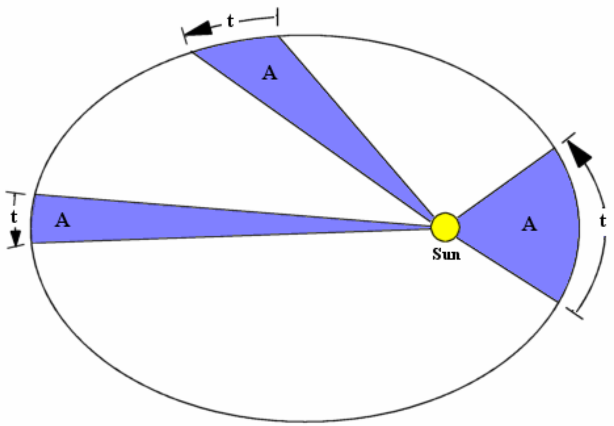
$$F_g = G\frac{Mm}{r^2} = \mu\frac{m}{r^2},$$

  - La aceleración debida a la fuerza gravitatoria generada por *M* es

$$\vec{g} = -\mu\frac{\vec{r}}{r^3},$$

    - puede expresarse como el gradiente de un potencial (el potencial gravitatorio U_g),

$$\vec{g} = -grad\ U_g \quad \Rightarrow \quad U_g = -\frac{\mu}{r}$$



Ley de gravitación universal - III

- El módulo de la aceleración gravitatoria en la superficie terrestre es

$$g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2} = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$$

$$R_T = 6378\ \mathrm{km}$$

Radio medio ecuatorial

G a una altura H sobre la superficie

$$g = g_0\left(\frac{R_T}{R_T+H}\right)^2$$

- Ley derivada para masas puntuales aplicable cuando las distancias entre los cuerpos son mucho mayores que las dimensiones de los mismos
  - Caso de los planetas y el Sol
  - En el caso de un vehículo espacial en órbita planetaria no sucede así
  - Se puede demostrar que esta ley es válida para un cuerpo de tamaño arbitrario siempre que tenga *simetría esférica*
    - el campo gravitatorio generado es el mismo que el que se tendría si toda su masa estuviese concentrada en su centro.
- Si la distribución de masas no es perfectamente esférica, entonces el potencial gravitatorio tampoco lo es, dando lugar a alteraciones de las órbitas, principalmente las bajas
  - La observación de estas alteraciones proporciona un método muy preciso para determinar la distribución de masas de la Tierra, la Luna y otros planetas
- En **este curso** se considera la **hipótesis** de que los cuerpos tienen **simetría esférica**.

El Problema de un cuerpo - I

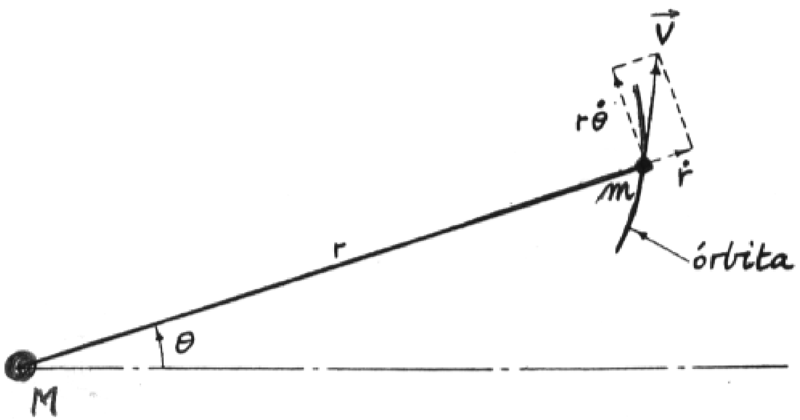
- **Problemas de un cuerpo:**
  - Movimiento orbital de un cuerpo de masa *m* sometido a la fuerza gravitatoria de otro de masa *M* mucho mayor (*M >> m*) situado en el origen de coordenadas (este cuerpo se considera *primario*)
    - El sistema de referencia ligado a *M* puede considerarse inercial.
- **Problemas de dos cuerpos**:
  - En el caso en que ambas masas fuesen comparables, por ejemplo el sistema Tierra-Luna, el sistema ligado a la Tierra no sería inercial (el sistema inercial estaría ligado al centro de masas del sistema Tierra-Luna)
- **2ª Ley de Newton en coordenadas polares:**
  - La Segunda ley de Newton se encarga de cuantificar el concepto de fuerza.
    - ***La fuerza neta aplicada sobre un cuerpo es proporcional a la aceleración que adquiere dicho cuerpo***
    - La única fuerza que actúa sobre ***m*** es la fuerza de atracción gravitatoria de ***M***, en sentido radial
    - El movimiento tiene lugar en un plano

Aceleración radial

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$
$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

Aceleración circunferencial

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2},$$
$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0.$$



El Problema de un cuerpo - II

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2},$$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0,$$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0. \quad \Rightarrow \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0, \quad \Rightarrow \quad r^2\dot{\theta} = constante.$$

Módulo del momento cinético por unidad de masa respecto al origen de coordenadas

$$\vec{h} = \vec{r} \wedge \vec{V} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} v_\theta &= r\dot{\theta} \\ v_r &= \dot{r} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad r^2\dot{\theta} = constante.$$

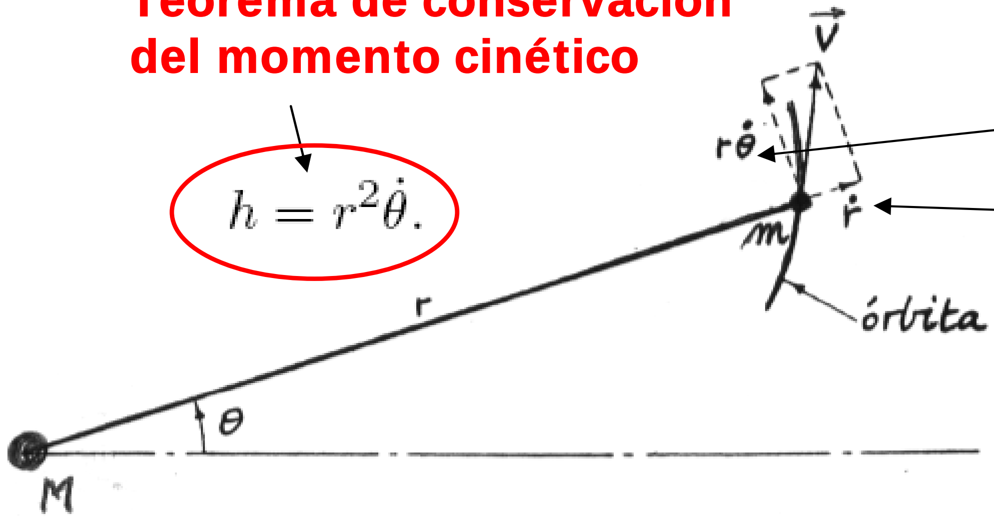
Teorema de conservación del momento cinético

$$h = r^2\dot{\theta}.$$

Componentes de las velocidades en coordenadas polares

$$v_\theta = r\dot{\theta}$$

$$v_r = \dot{r}$$



El Problema de un cuerpo - III

- Las ecuaciones paramétricas de la trayectoria se definen a partir de

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2}, \qquad r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0.$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2}, \qquad h = r^2\dot{\theta}.$$

$$\Rightarrow$$

Ecuaciones Paramétricas de laTrayectoria

$$r = r(t), \theta = \theta(t)$$

- Las ecuaciones explicitas de la órbita
  - El tiempo aparece de forma implícita

$$r = r(\theta)$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{h}{r^2},$$

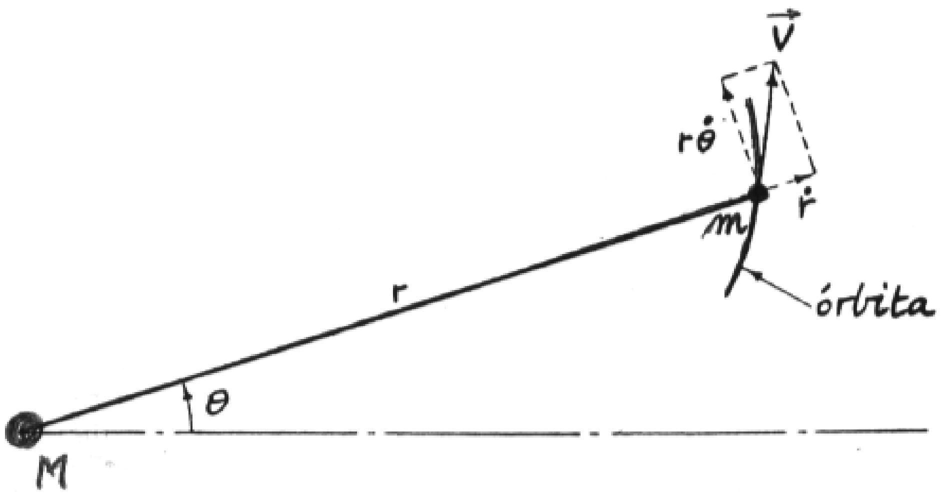
$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)\frac{h}{r^2},$$

$$\Downarrow$$

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2},$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d^2r}{d\theta^2} - \frac{2}{r}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r = -\frac{\mu}{h^2}r^2.$$



El Problema de un cuerpo - IV

- Ecuación diferencial ordinaria

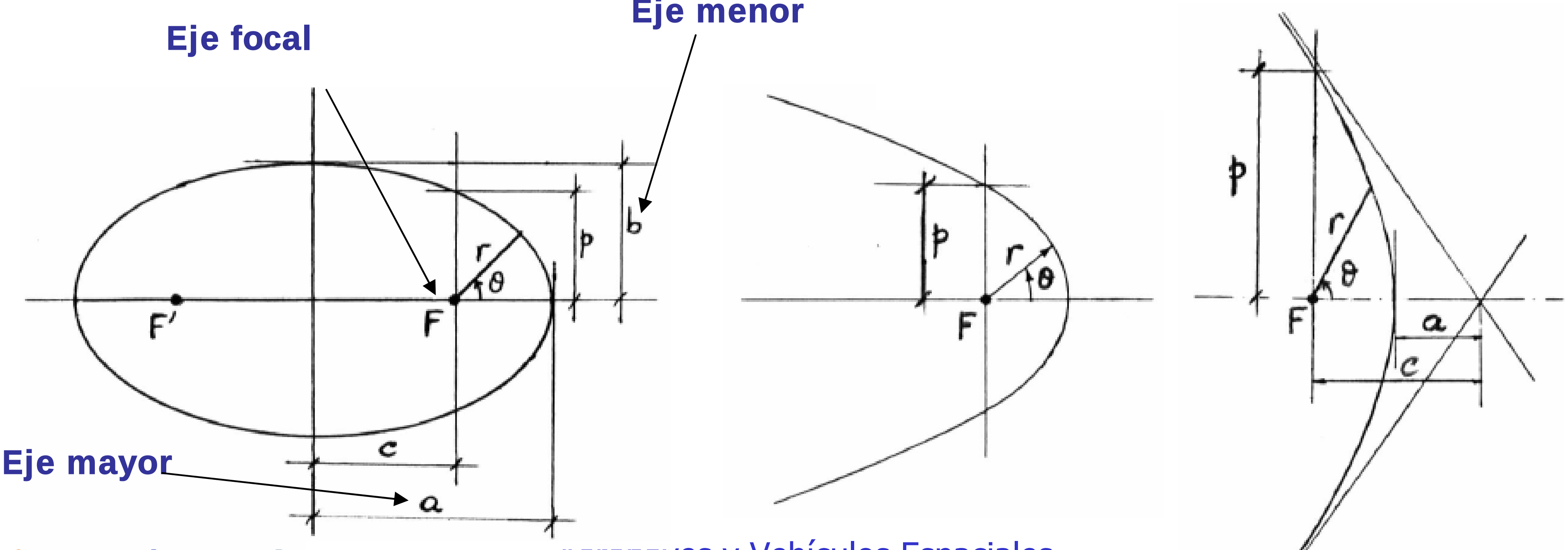
Excentricidad – constante de integracion

$$\frac{d^2r}{d\theta^2} - \frac{2}{r}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r = -\frac{\mu}{h^2}r^2. \Rightarrow \quad r = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1+e\cos\theta} = \frac{p}{1+e\cos\theta}, \qquad p = \frac{h^2}{\mu}$$

- Excentricidad: es un parámetro que determina el grado de desviación de una sección cónica con respecto a una circunferencia.

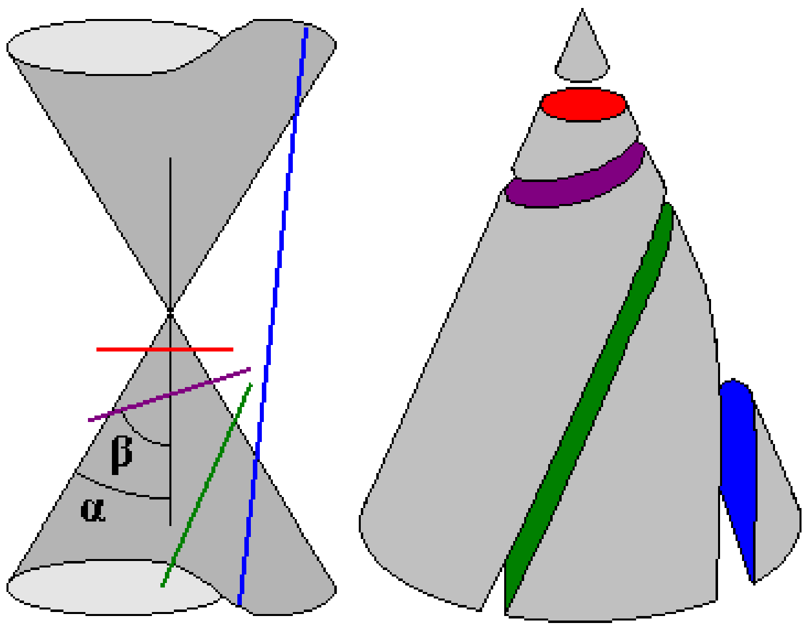
$$e = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}.$$

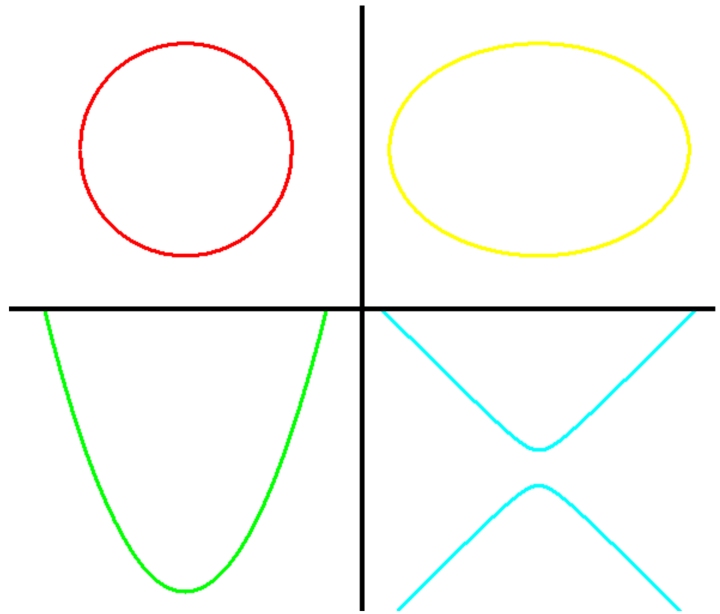
- Ecuación focal de una cónica con origen de coordenadas en un foco y θ medido desde el eje focal.



Secciones Cónicas

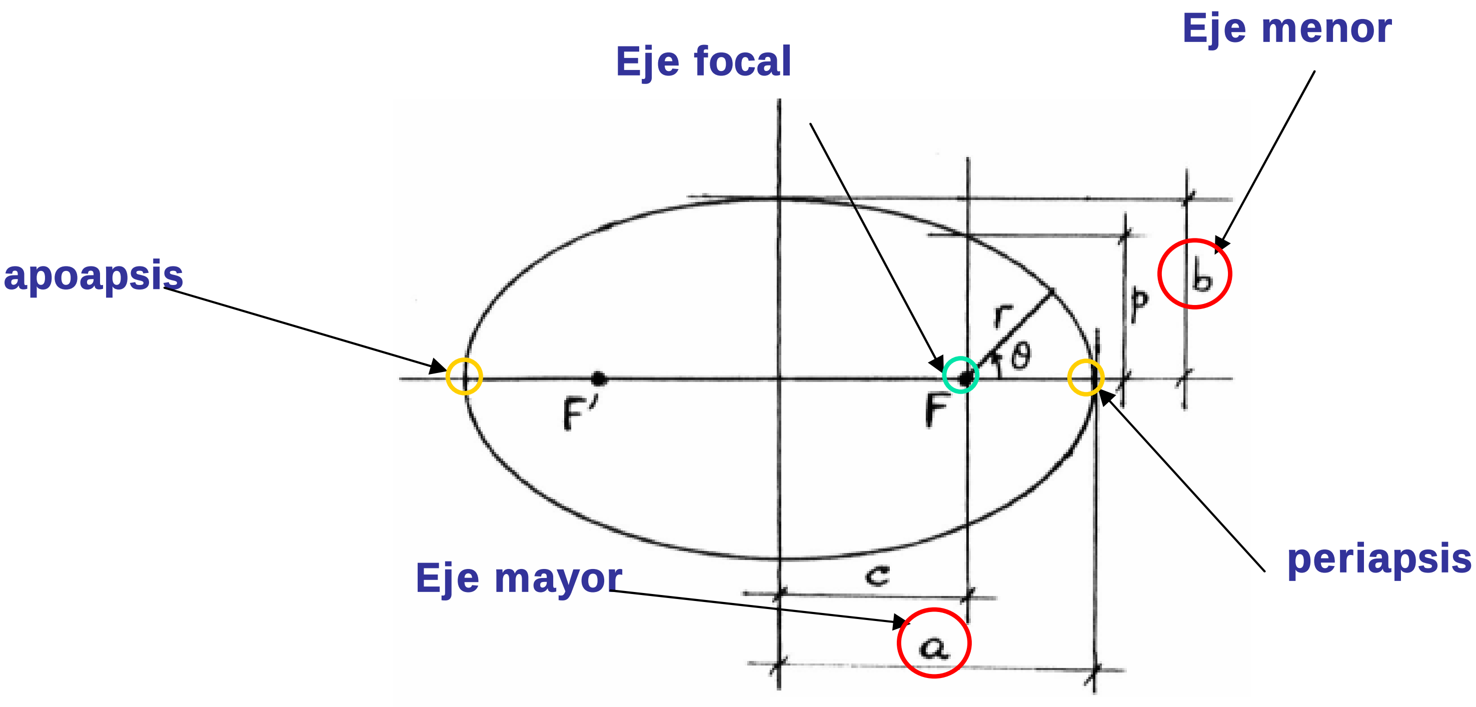
- Sección cónica: la curva intersección de un cono con un plano que no pasa por su vértice.
- En función de la relación existente entre el ángulo de conicidad (α) y la inclinación del plano respecto del eje del cono (β), pueden obtenerse diferentes secciones cónicas:
  - β < α : Hipérbola (azul)
  - β = α : Parábola (verde)
  - β > α : Elipse (morado)
  - β = 90º : Circunferencia (rojo)





El Problema de un cuerpo - V

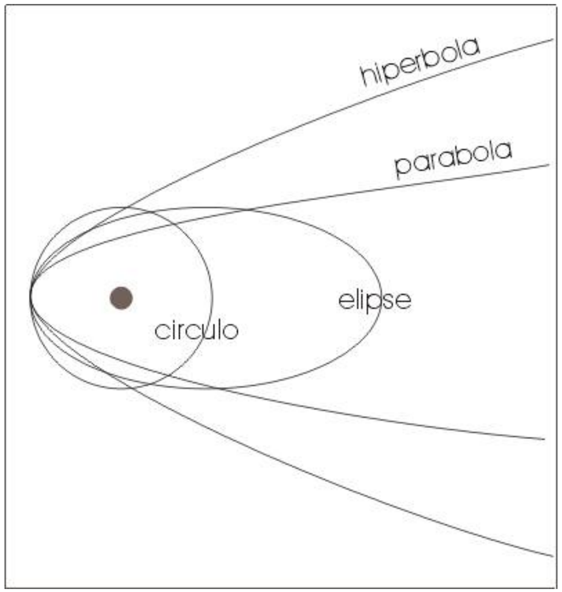
- El punto más próximo al foco se llama periapsis y el más alejado apoapsis
  - perigeo y apogeo para el caso de la Tierra
  - perihelio y afelio para el del Sol.
- Se ha tomado el criterio de medir el ángulo polar θ desde el **periapsis**, en la dirección del movimiento, por lo que debe ser $e \geq 0$
  - este ángulo recibe el nombre de anomalía verdadera.



El Problema de un cuerpo - VI

- El tipo de órbita, es decir, el tipo de cónica, depende del parámetro *e*, el cual debe definirse a partir de algún dato de la propia órbita:
- Tipos posibles de órbitas en función de *e*:
  - Circunferencia: $e=0$.
  - Elipse: $0 < e < 1$.
  - Parábola: $e=1$.
  - Hipérbola: $e>1$.

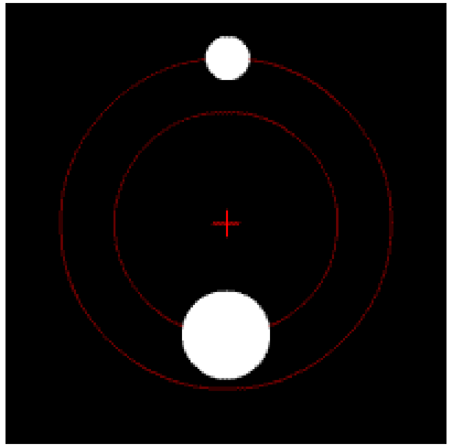
$$r = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1+e\cos\theta} = \frac{p}{1+e\cos\theta},$$

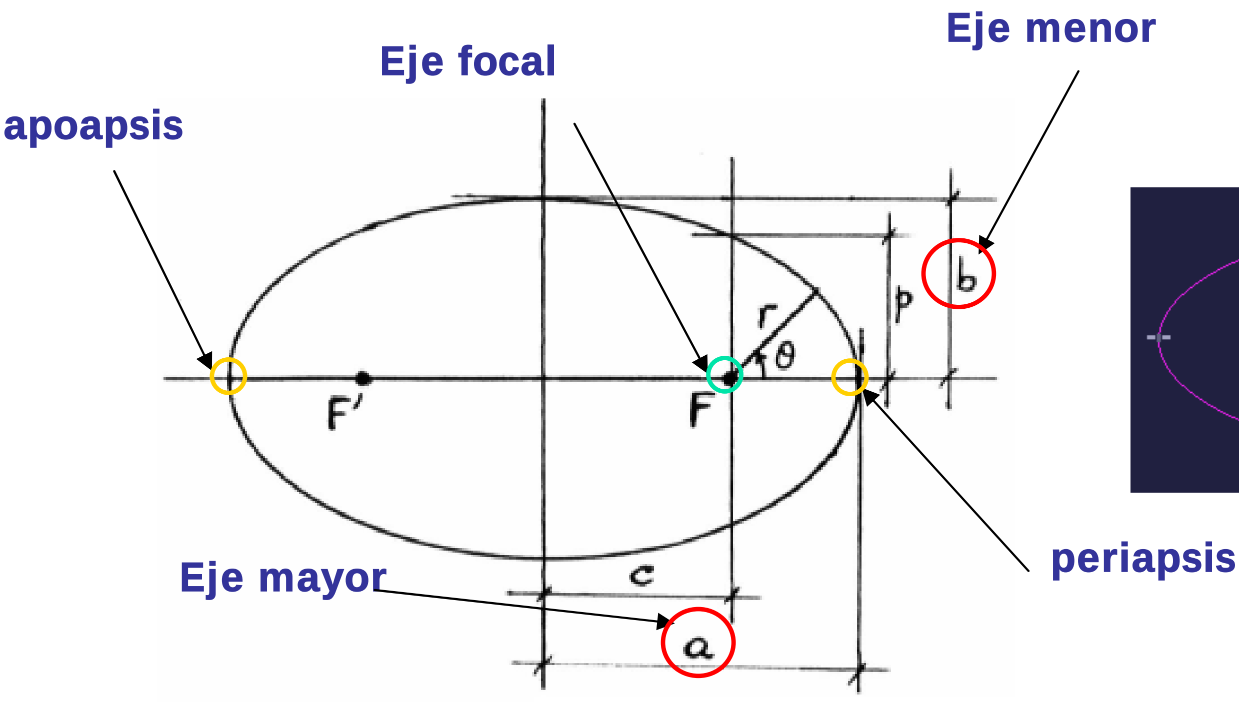


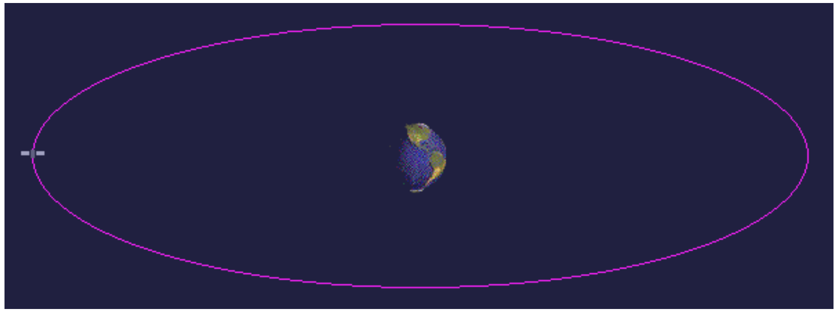
Órbita Circular

- Circunferencia: e=0.
  - órbita circular de radio

$$r = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1+e\cos\theta} = \frac{p}{1+e\cos\theta}, \Rightarrow \begin{array}{c} p = \frac{h^2}{\mu} \\ e=0. \end{array} \Rightarrow R = \frac{h^2}{\mu}.$$



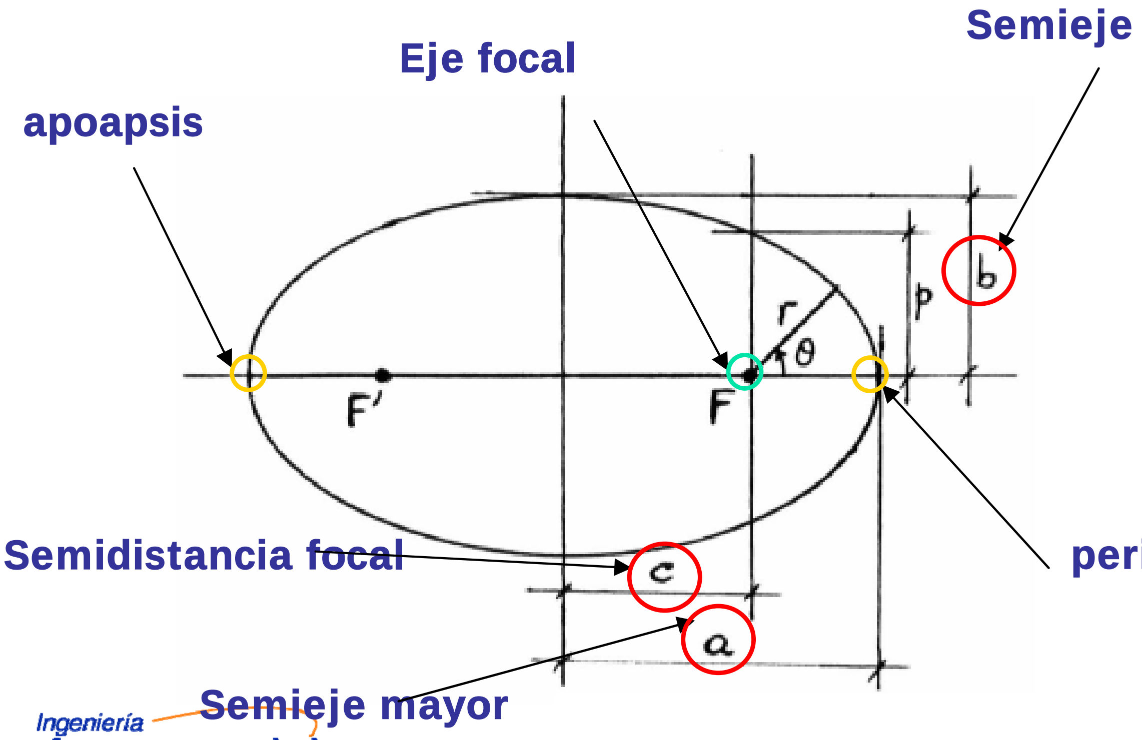


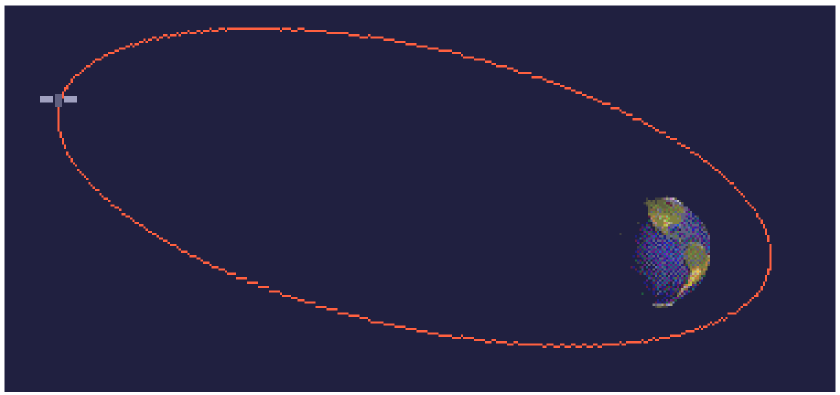


Órbita Elíptica

- Elipse: 0 $< e <$ 1.
  - para cada valor de *e*, se tiene una elipse de excentricidad *e* y de parámetro
  - Los semiejes de la elipse, *a* y *b*, vienen definidos por las relaciones

$$r = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1+ecos\theta} = \frac{p}{1+ecos\theta}, \quad \Rightarrow \quad p = \frac{h^2}{\mu} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} p = a(1-e^2) = \dfrac{b^2}{a} \\ e = \sqrt{1-(\dfrac{b}{a})^2}. \end{array}$$

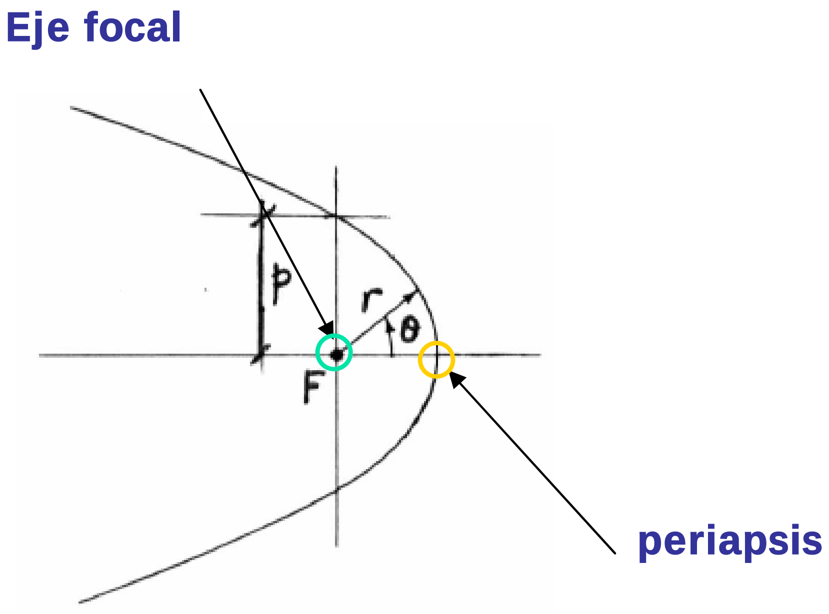


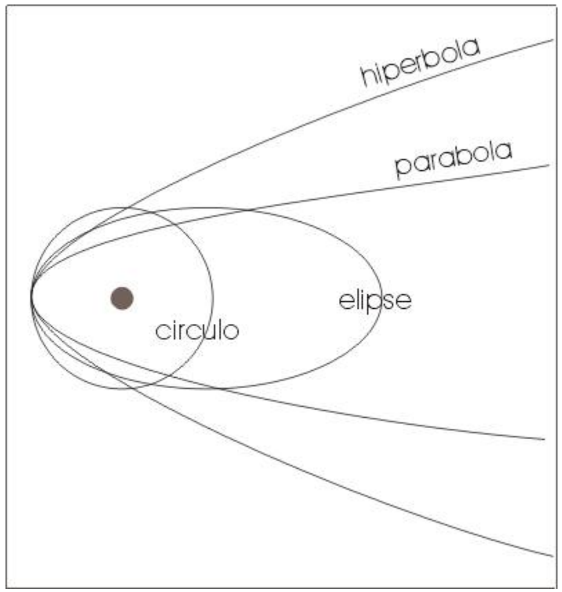


Órbita Parabólica

- Parábola: *e*=1.
  - Parábola de parámetro
  - En este caso *p* representa el doble de la distancia del foco al periapsis.

$$r = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1+ecos\theta} = \frac{p}{1+ecos\theta}, \quad \Rightarrow \quad p = \frac{h^2}{\mu}$$

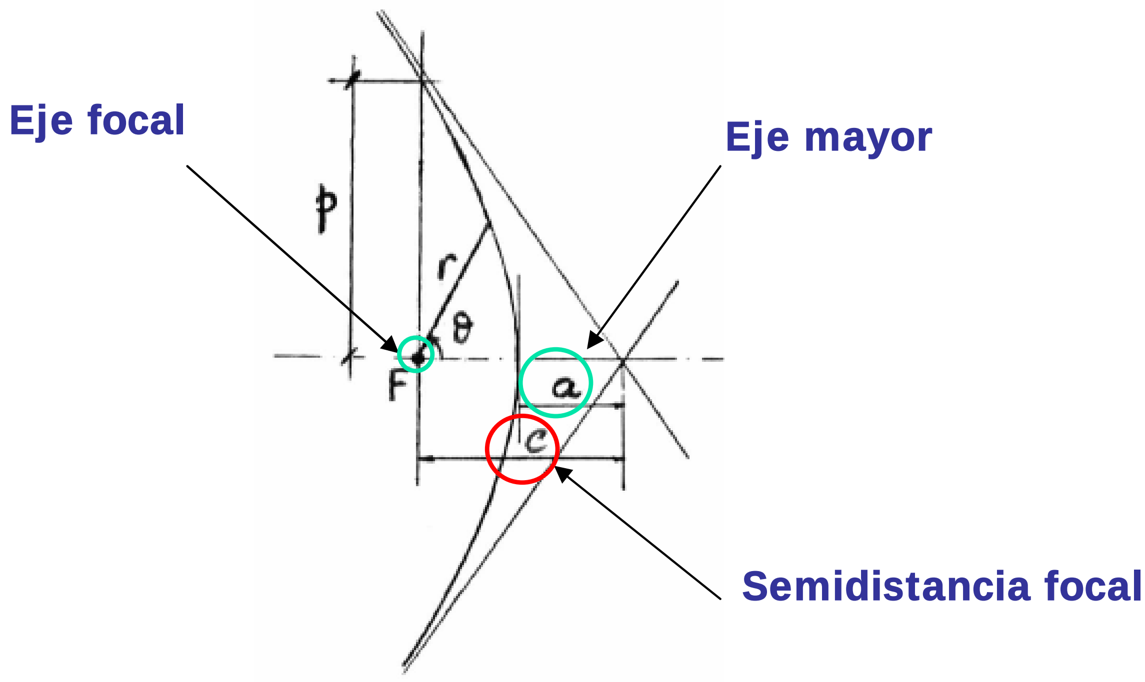


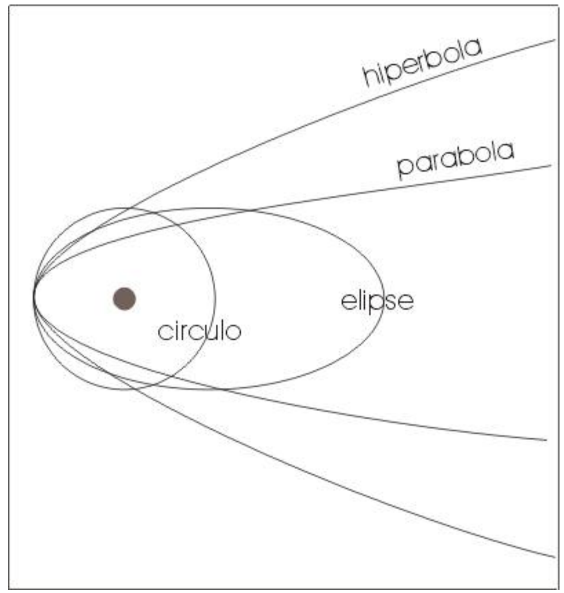


Órbita Hipérbólica

- Hipérbola: *e* >1.
  - Para cada valor de *e* se tiene una hipérbola de excentricidad *e* y de parámetro $p = \frac{h^2}{\mu}$
  - El semieje *a* y la semidistancia focal *c* de la hipérbola vienen definidos por:

$$r = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1+ecos\theta} = \frac{p}{1+ecos\theta},\quad \Rightarrow \quad p = \frac{h^2}{\mu} \quad \Rightarrow \quad \begin{gathered} p = a(e^2-1) \\ e = \frac{c}{a}. \end{gathered}$$





Energía Total - I

- El tipo de trayectoria se puede relacionar con la energía total del cuerpo.
- La energía total por unidad de masa (E) es la suma de las correspondientes energía cinética y potencial

Energía cinética **Energía potencial**

$$E = \frac{1}{2}V^2 - \frac{\mu}{r},$$

$$h = r^2\dot{\theta}.$$

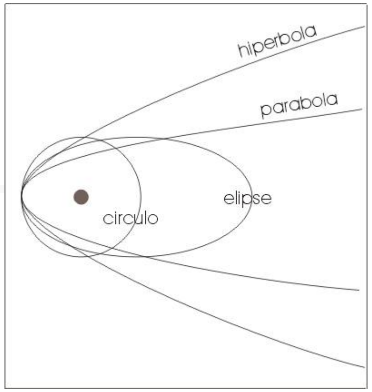
$$V^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \Rightarrow \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{h}{r^2} \Rightarrow E = \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{h^2}(e^2-1)$$

$$r = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1+ecos\theta} = \frac{p}{1+ecos\theta},$$

- La energía total es constante (sistema conservativo)
  - Como la energía potencial en negativa, eso puede llevar a que la energía total sea también negativa

$$E = \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{h^2}(e^2-1) \Rightarrow p = \frac{h^2}{\mu} \Rightarrow E = \frac{\mu}{2p}(e^2-1),$$

Energía Total - II



- Órbita circular: $e=0$
  - E <0

$$r = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1+e\cos\theta} = \frac{p}{1+e\cos\theta}, \Rightarrow \begin{array}{c} p = \frac{h^2}{\mu} \\ e=0. \end{array} \Rightarrow R = \frac{h^2}{\mu}.$$

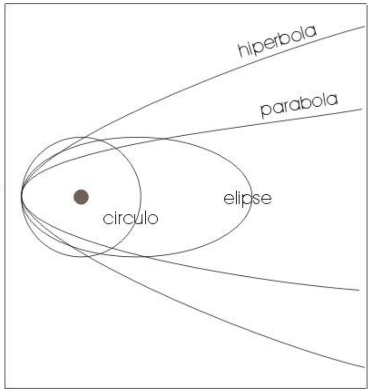
$$E = \frac{\mu}{2p}(e^2-1), \Rightarrow E = -\frac{\mu^2}{2h^2} \quad E = -\frac{\mu}{2R}, \Rightarrow \begin{array}{c} E = \frac{1}{2}V^2 - \frac{\mu}{r}, \\ E = -\frac{\mu}{2R}, \end{array} \Rightarrow V = \sqrt{\frac{\mu}{R}};$$

- Órbita elíptica: $0 < e < 1$
  - E <0

$$r = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1+e\cos\theta} = \frac{p}{1+e\cos\theta}, \Rightarrow p = \frac{h^2}{\mu} \Rightarrow \begin{array}{c} p = a(1-e^2) = \frac{b^2}{a}. \\ e = \sqrt{1-(\frac{b}{a})^2}. \end{array}$$

$$E = \frac{\mu}{2p}(e^2-1), \Rightarrow \begin{array}{c} p = a(1-e^2) \\ e = \sqrt{1-(\frac{b}{a})^2}. \end{array} \Rightarrow E = -\frac{\mu}{2a} \Rightarrow \begin{array}{c} E = \frac{1}{2}V^2 - \frac{\mu}{r}, \\ E = -\frac{\mu}{2a} \end{array} \Rightarrow V = \sqrt{\mu(\frac{2}{r}-\frac{1}{a})};$$

Energía Total - III



- Órbita parabólica: $e=1$

$$r=\frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1+ecos\theta}=\frac{p}{1+ecos\theta}, \Rightarrow p=\frac{h^2}{\mu}$$

$$E=\frac{\mu}{2p}(e^2-1), \Rightarrow E=0 \Rightarrow E=\frac{1}{2}V^2-\frac{\mu}{r}, \Rightarrow V=\sqrt{\frac{2\mu}{r}};$$

- Órbita hiperbólica: $e>1$
  - E >0

$$r=\frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1+ecos\theta}=\frac{p}{1+ecos\theta}, \Rightarrow p=\frac{h^2}{\mu} \Rightarrow \begin{array}{c} p=a(e^2-1) \\ e=\frac{c}{a}. \end{array}$$

$$\begin{array}{c} E=\frac{\mu}{2p}(e^2-1), \\ p=a(e^2-1) \\ e=\frac{c}{a} \end{array} \Rightarrow E=\frac{\mu}{2a} \Rightarrow \begin{array}{c} E=\frac{1}{2}V^2-\frac{\mu}{r}, \\ E=\frac{\mu}{2a} \end{array} \Rightarrow V=\sqrt{\mu(\frac{2}{r}+\frac{1}{a})}.$$

Determinación de Orbitas

- Para determinar una órbita se necesita conocer dos parámetros geométricos, *p* y *e*.

$$r = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1+ecos\theta} = \frac{p}{1+ecos\theta},$$

- Los parámetros p y e pueden calcularse a partir de dos parámetros físicos, *h* y *E*, mediante las relaciones

$$p = \frac{h^2}{\mu} \qquad e = \sqrt{1+\frac{2Eh^2}{\mu^2}}.$$

- *h* y *E* son dos constantes del movimiento y pueden calcularse conociendo los valores de $\vec{r}$ y $\vec{V}$ en un punto cualquiera de la órbita mediante las relaciones

$$h = \mid \vec{r} \wedge \vec{V} \mid \qquad E = \frac{1}{2}V^2 - \frac{\mu}{r}$$

La energía determina el tipo de órbita

$$h = rV\sin\varphi$$

φ es el ángulo formado por el vector velocidad $\vec{V}$ y el radio vector $\vec{r}$,

Periodo de órbitas cerradas

- Una característica importante de las órbitas cerradas es su periodo:
  - El tiempo necesario para recorrer la órbita.
  - La velocidad areolar:
    - el área barrida por el radiovector por unidad de tiempo

módulo

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2}\vec{r} \wedge \vec{V} \quad \Rightarrow \quad \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{1}{2}h$$

    - El módulo es constante ya que el momento cinético por unidad de masa (h) es constante.
    - El cuerpo se mueve más lentamente cerca del apoapsis y más rápidamente cerca del periapsis
    - El periodo sólo depende del semieje a (no depende de e)
    - El periodo viene dado por el cociente entre el área de la órbita y la velocidad a la que se ha barrido

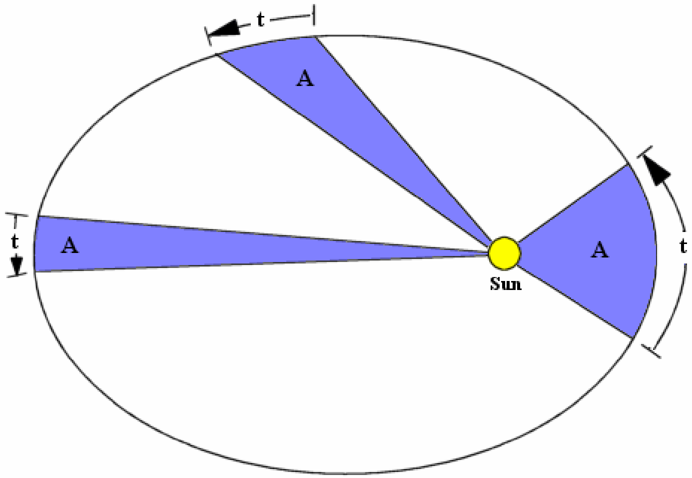
$$T = \frac{A}{\frac{dA}{dt}} = \frac{\pi ab}{\frac{1}{2}h}.$$

$$p = \frac{h^2}{\mu} \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt{p\mu} = \sqrt{\frac{b^2}{a}\mu}.$$

$$p = a(1-e^2) = \frac{b^2}{a}.$$

Sóle depende de a

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}.$$



Newton - Kepler

- A partir de la Ley de la Gravitación se HAN derivado las ecuaciones del movimiento orbital:
- Dos maneras distinta de abordar los problemas de mecánica orbital:
  - problema *directo:*
    - dada la fuerza se calcula el movimiento (problema que también resolvió Newton),
      - Leyes de Newton
  - problema *inverso:*
    - en contraposición al problema *inverso*, en el que dado el movimiento se calcula la fuerza que lo produce.
      - Leyes cinemáticas de Kepler

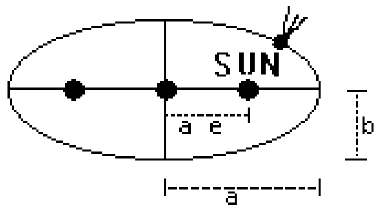
Demostración Leyes de Kepler

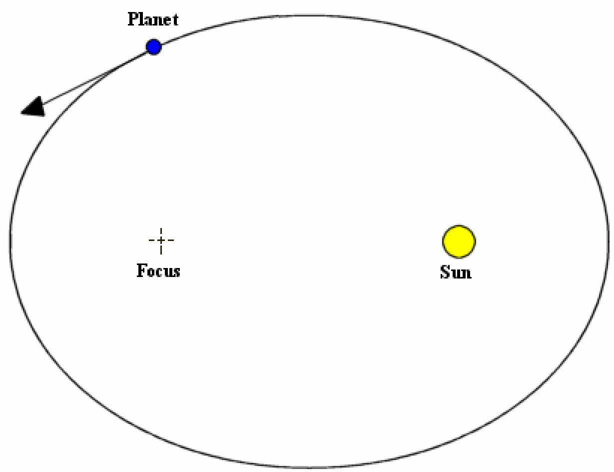
- **1ª Ley de Kepler:** Todos los planetas describen en su movimiento alrededor del Sol órbitas elípticas con el Sol en un foco.
  - Las órbitas alrededor del Sol son cerradas y no son circunferencias (evidencia experimental), luego son elípticas, ya que se ha demostrado que son cónicas.
- **2ª Ley de Kepler:** La línea que conecta el Sol y el planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.
  - La velocidad areolar es constante.

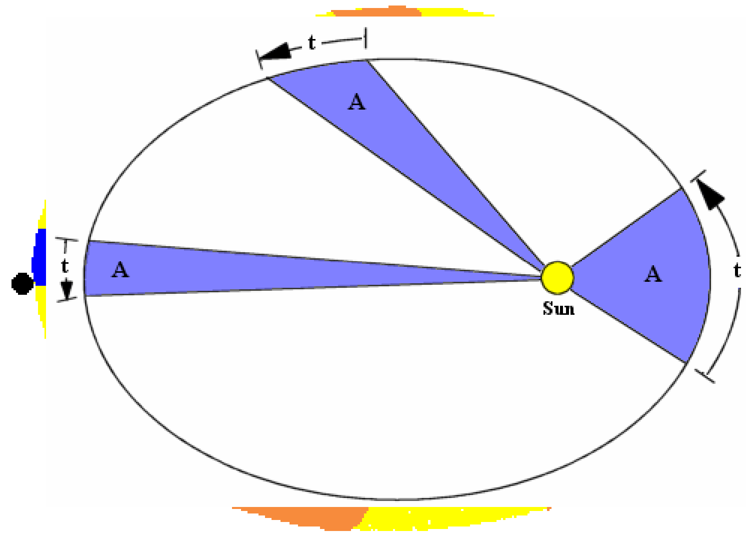
$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}h$$

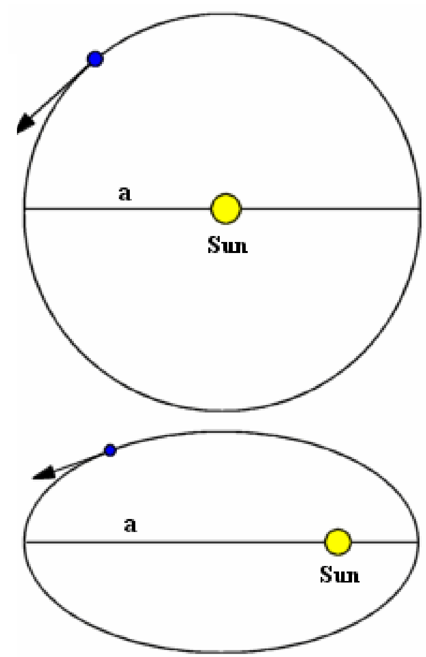
- **3ª Ley de Kepler:** Los cuadrados de los periodos de las órbitas son proporcionales a los cubos de los semiejes correspondientes.

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\mu}a^3.$$









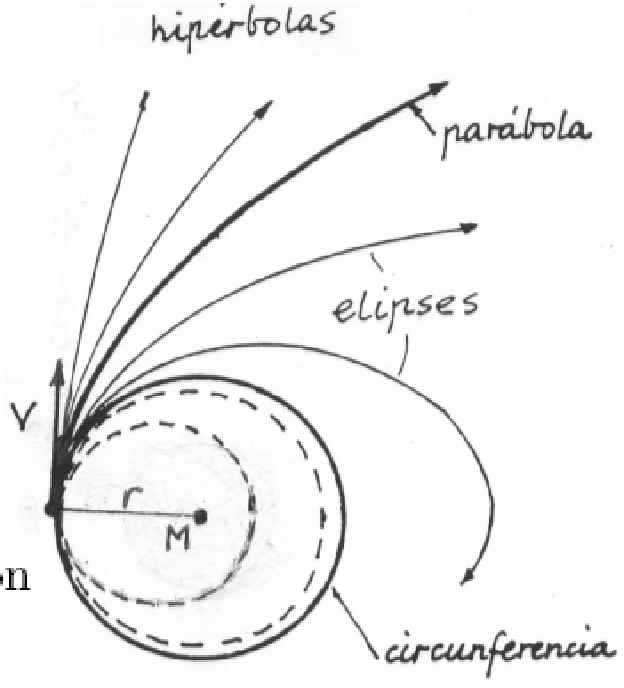
Velocidades Cosmonáuticas Características - I

- **Velocidad de satelización: V_C**
  - es la velocidad que hay que proporcionar, en la dirección adecuada, a un cuerpo situado a una distancia *r* del centro de atracción para que mantenga una órbita circular.
- **Velocidad de escape (o parabólica): V_P ,**
  - Es la mínima velocidad que hay que proporcionar, en la dirección adecuada, a un cuerpo situado a una distancia *r* del centro de atracción para que venza el campo gravitatorio.
  - El cuerpo sigue una trayectoria parabólica, que lo alejaría hasta el infinito (con relación al centro de atracción), al que llegaría con velocidad nula.

Velocidad de satelización $V_C = \sqrt{\frac{\mu}{r}}.$

Velocidad de escape $V_P = \sqrt{2\frac{\mu}{r}}.$

la velocidad de escape es $\sqrt{2}$ veces la velocidad de satelización



Propiedades Gravitacionales

Sun:

Mean radius	$6.9599\ 10^5$ km
Mass	$1.990\ 10^{30}$ kg
Mean density	1.409 g cm^{-3}
Gravitational parameter	$1.32712\ 10^{11}$ km^3 s^{-2}
Inclination of equator to ecliptic	$7°15'$
Rotation period (at 17° latitude)	25.38 days
Gravitational acceleration at surface	273.97 m s^{-2}
Centrifugal acceleration at surface	0.0057 m s^{-2}
Radiation emitted	$3.826\ 10^{26}$ W
Solar constant	1360 W m^{-2}
Effective blackbody temperature	5760 K

Earth:

Mean equatorial radius	6378.140 km
Polar radius (based on spheroid)	6356.755 km
Mass	$5.976\ 10^{24}$ kg
Mean density	5.517 g cm^{-3}
Gravitational parameter	$3.986013\ 10^5$ km^3 s^{-2}
Obliquity of ecliptic	$23°27'8.26''–46.86''$ T*
Gravitational acceleration at equator	9.8142 m s^{-2}
Equatorial rotational velocity	0.4651 km s^{-1}
Centrifugal acceleration at equator	0.0339 m s^{-2}
International standard gravity	9.80665 m s^{-2}
Escape velocity at equator	11.19 km s^{-1}
Sun–earth distance, minimum	$1.4710\ 10^8$ km
maximum	$1.5210\ 10^8$ km

Moon:

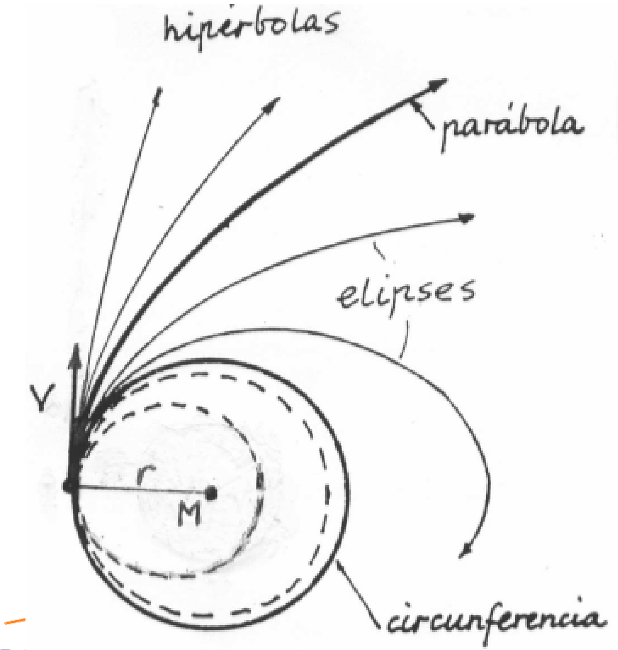
Mean radius	1738.2 km
Mass	$7.350\ 10^{22}$ kg
Mean density	3.341 g cm^{-3}
Gravitational parameter	$4.90265\ 10^3$ km^3 s^{-2}
Mean orbital inclination to ecliptic	$5°8'43''$
Mean equatorial inclination to ecliptic	$1°32'30''$
Rotation period	27.32166 d_E
Gravitational acceleration at surface	1.62 m s^{-2}
Escape velocity at surface	2.38 km s^{-1}
Earth–moon distance, minimum	356 400 km
maximum	406 700 km

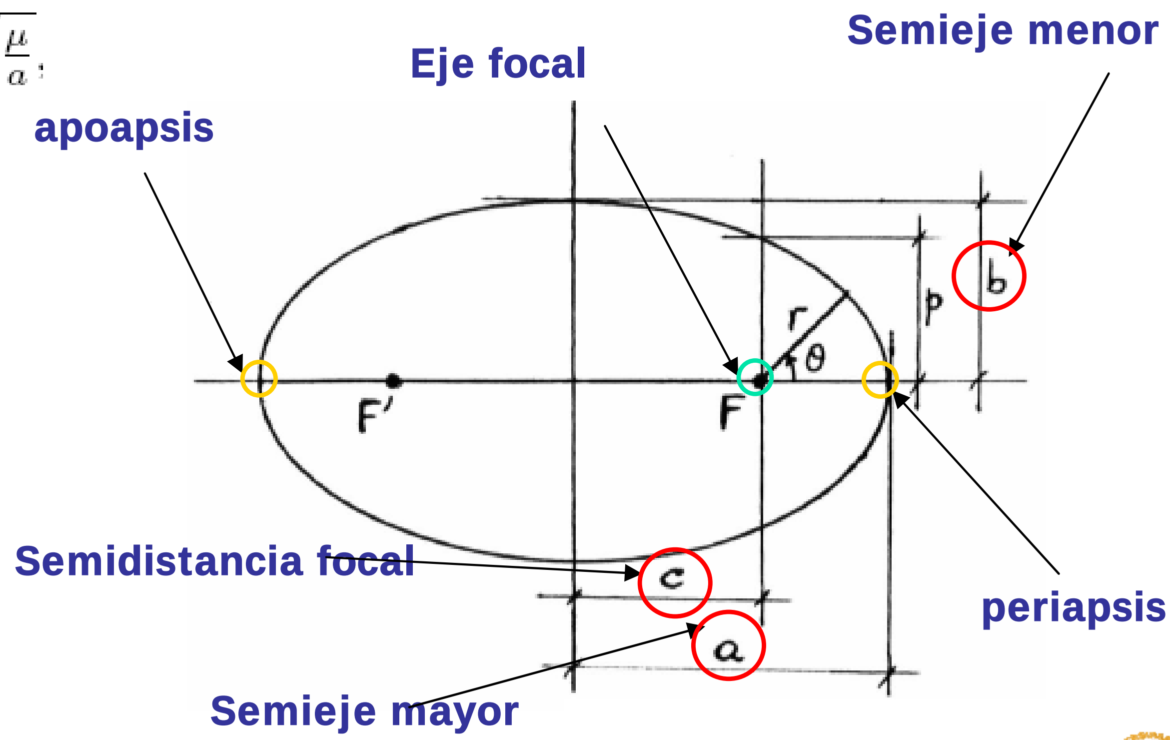
*T is in centuries from the year 1900.

Velocidades Cosmonáuticas Características - II

- Velocidad proporcionada es ***V < V_C***
  - Órbita eliptica con semieje $a < r$
- Velocidad proporcionada $\boldsymbol{V_C < V < V_P}$
  - Órbita es elíptica con semieje $a > r$.
- Velocidad proporcionada $\boldsymbol{V > V_P}$
  - Órbita es hiperbólica
  - El cuerpo tiene una energía superior a la necesaria para vencer el campo gravitatorio
  - El cuerpo se alejaría hasta el infinito, al que llegaría con velocidad no nula, V_1,
  - V_1 está relacionada con el exceso de velocidad respecto de V_P mediante la relación

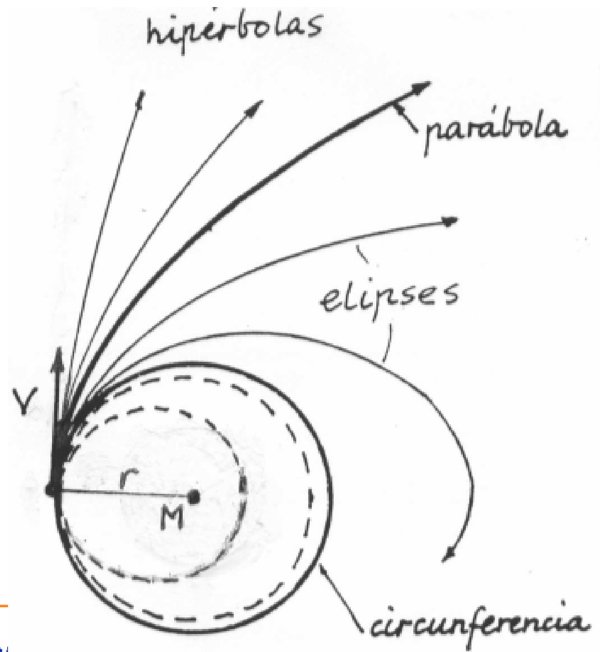
$$V^2 = V_P^2 + V_\infty^2, \qquad V_\infty = \sqrt{\frac{\mu}{a}}.$$

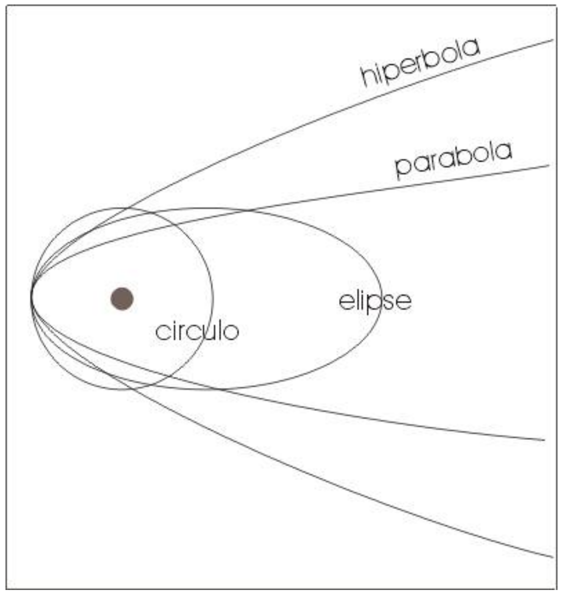




Velocidades Cosmonáuticas Características - III

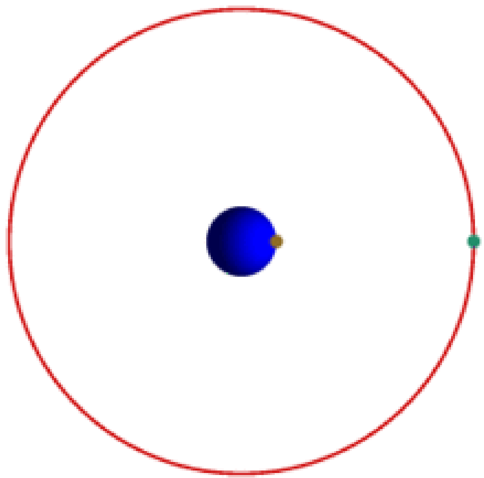
- En el análisis anterior, cuando $V \geq V_P$ el cuerpo se aleja hasta el infinito respecto del centro de atracción.
  - Este resultado se obtiene a partir de una teoría en la que sólo intervienen ambos cuerpos.
  - En realidad existen más cuerpos y el resultado final será distinto.
- Si se trata de un cuerpo que ha escapado de la órbita terrestre con $V = V_P$, describirá una órbita elíptica alrededor del Sol, muy próxima a la órbita seguida por la Tierra.
- En los **viajes interplanetarios** se requieren órbitas capaces de **intersectar las órbitas de los planetas**, por lo que **deben ser órbitas hiperbólicas** de salida de la Tierra.
  - Es decir, con $V > V_P$ el cuerpo no sólo se aleja a gran distancia del centro de atracción sino que escapa de la órbita en la que estuviera éste.





Órbitas terrestres - I

- Las Orbitas Terrestres se pueden clasificar generalmente en 3 según su rango de alturas
  - **Low Earth Orbit (LEO)**
    - 200 - 2000 km
      - Transbordador Espacial,
      - Estación Espacial Internacional (ISS)
      - Vuelos suborbitales
    - Mucha basura espacial
  - **Medium Earth Orbit (MEO)**
    - 2000-35786 km
    - Satélites para navegación -
      - GPS
      - GLONASS
      - GALILEO
  - **Geostationary orbit (GEO)**
    - 35,786 km
    - Produce un periodo orbital equivalente al de la tierra
      - Satélites de comunicación y televisión
- Existen variaciones entre las órbitas terrestres que se clasifican:
  - Órbita Molniya
  - Órbita Tundra
  - Órbita Ecuatorial
  - Órbita Lunar
  - Órbita Polar



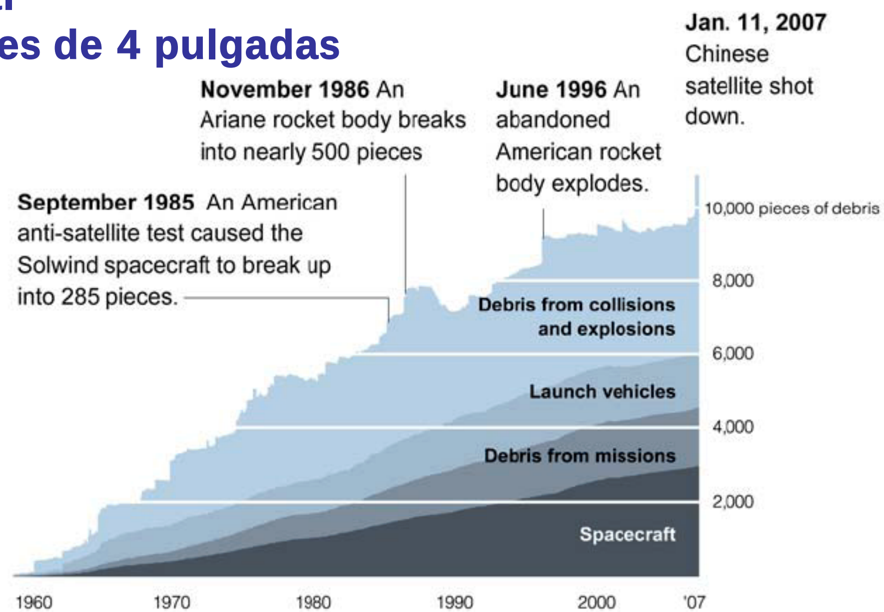
Órbitas terrestres - II

- Órbitas bajas:
  - Órbitas circulares o de excentricidad muy pequeña
    - en caso contrario interceptarían la superficie de la Tierra (como ocurre con los cohetes de sondeo o los misiles balísticos estratégicos).
    - La **altura mínima operativa es de unos 200 km**, ya que por debajo de ella la resistencia atmosférica se convierte en un importante factor de frenado del satélite
    - Se consideran órbitas bajas aquéllas cuya altura está comprendida entre 200 y 1000 km.
    - A **200 km** la velocidad de satelización es V_C**=7.78 km/s**, y la velocidad de escape V_P **=11.0 km/s**.
    - El periodo correspondiente a una órbita circular a 200 km de altura es T=88.5 min.
    - Este tipo de órbitas es utilizado por:
      - Satélites de observación de la Tierra
      - Estación Espacial Internacional
      - Órbitas de aparcamiento desde las que se consigue otro tipo de órbitas en algunas misiones.

$$V_C = \sqrt{\frac{\mu}{r}}. \qquad V_P = \sqrt{2\frac{\mu}{r}}.$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}.$$

Basura Espacial
Objetos mayores de 4 pulgadas

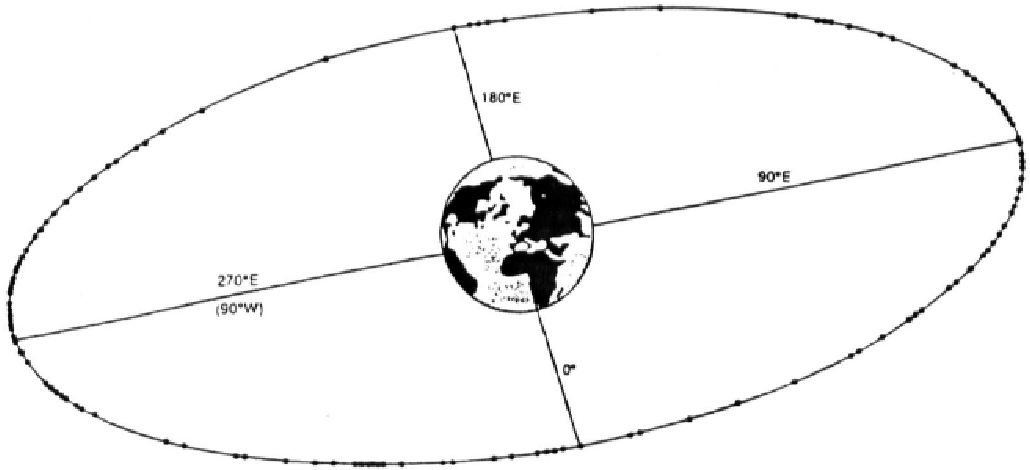


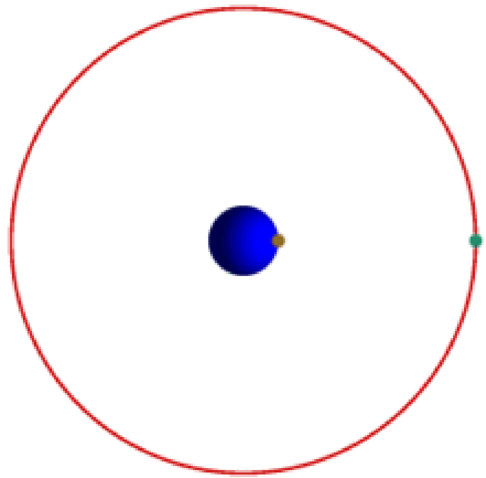
Órbitas terrestres - III

- **Orbita geoestacionaria:**
  - La órbita geoestacionaria se define por la condición de que el punto subsatélite (intersección de la vertical del satélite con la superficie terrestre) es un punto fijo de la Tierra
  - Se trata de una órbita circular, situada en el plano ecuatorial terrestre, con movimiento de Oeste a Este y con velocidad orbital angular igual a la velocidad de rotación sidérea de la Tierra, la cual corresponde al periodo sidéreo *T*=23 h, 56 min, 4.09 s.
  - La altura correspondiente, H_g, se obtiene de la expresión del periodo

$$(R_T + H_g)^3 = \mu\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}.$$

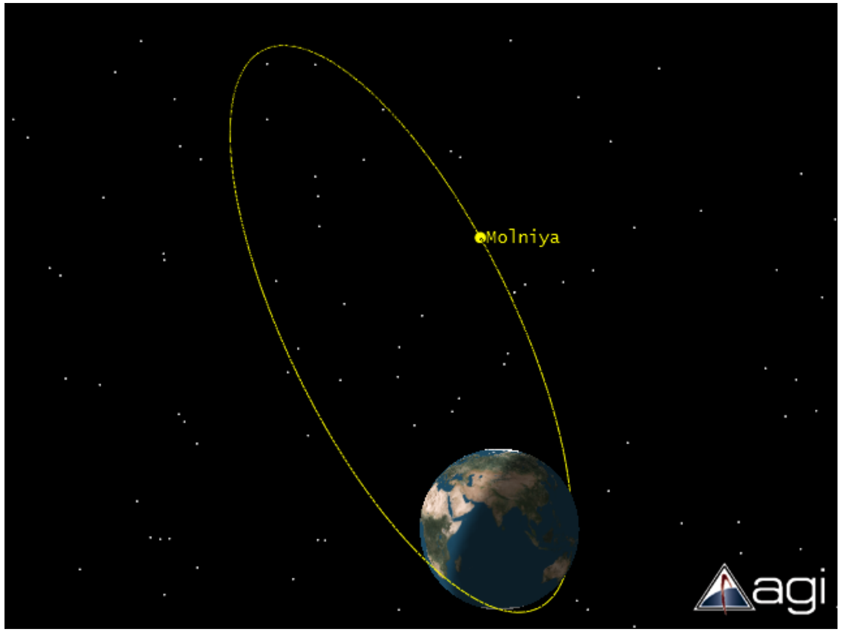
  - *Hg*=35786 km.
  - Velocidad de satelización V_C=3.07 km/s.
  - Utilizada por satélites de telecomunicación.

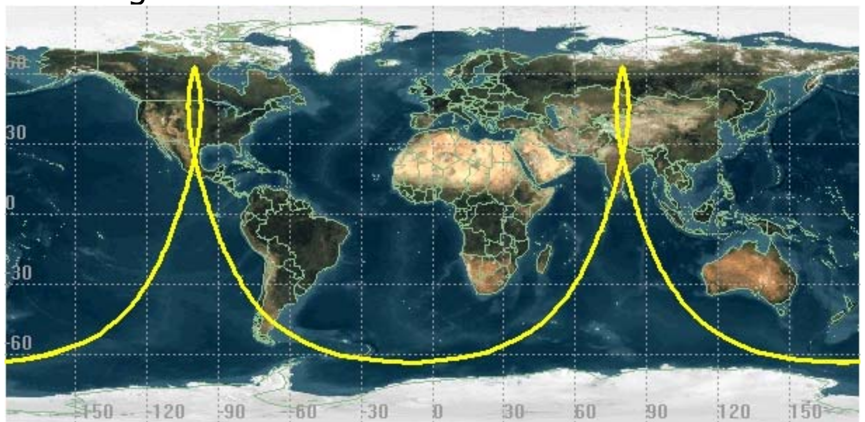


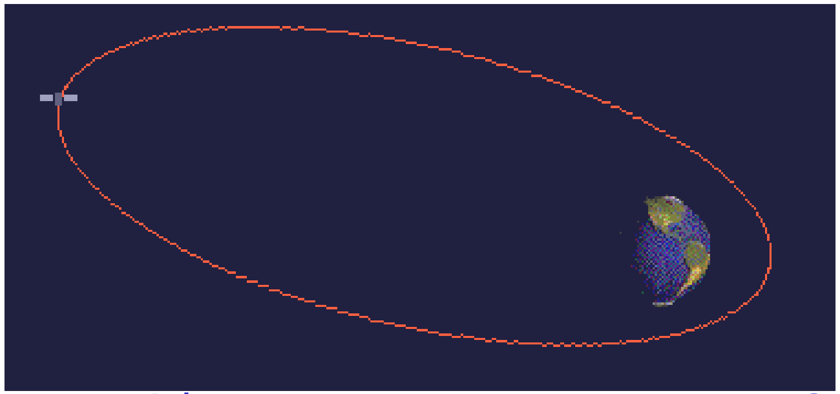


Órbitas terrestres – IV

- Orbitas de alta excentricidad:
  - Órbitas que tienen la peculiaridad de que el vehículo está mucho tiempo muy alejado de la Tierra y pasa rápidamente cerca de ella.
  - La órbita Molniya:
    - excentricidad $e \approx 0.75$ y periodo 12 h,
    - serie de satélites de comunicaciones de la URSS.
    - perigeo a unos 300 km de altura, y su apogeo a unos 40000 km.
  - Misiones dirigidas al espacio exterior.
  - Las mediciones se efectúan fuera de las perturbaciones electromagnéticas próximas a la Tierra y se transmiten en las proximidades del perigeo.
  - Órbitas de transferencia desde una órbita de aparcamiento a la geoestacionaria.

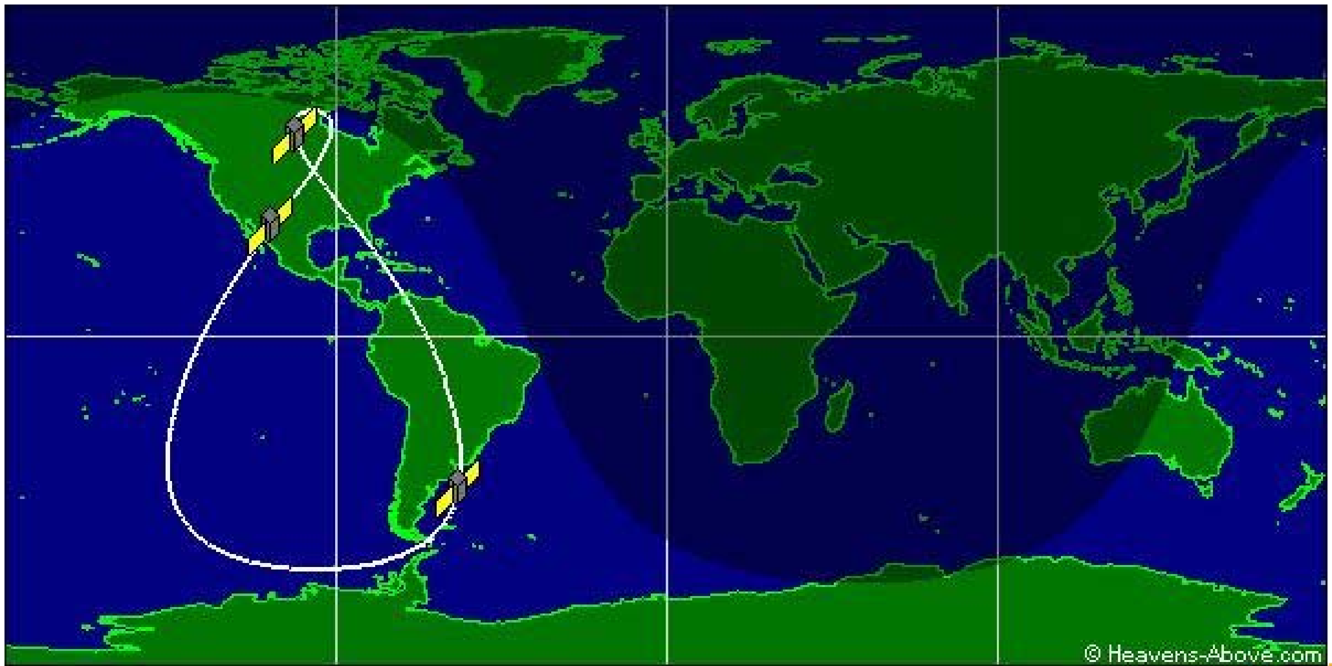






Órbitas terrestres – V

- Órbita Tundra:
  - Satélites con un periodo de 1 día sideral (23 h 56 m 4.1 s)
  - Satélites colocados en estas orbitas pasa la mayoría del tiempo orbital sobre una misma zona seleccionada.
  - Sirius Satellite Radio Sytem:
    - Sistema de Radio que ofrece 69 canales de música y 68 canales de deportes transmitidos por radio sin anuncios comerciales.



Sistemas de Coordenadas - I

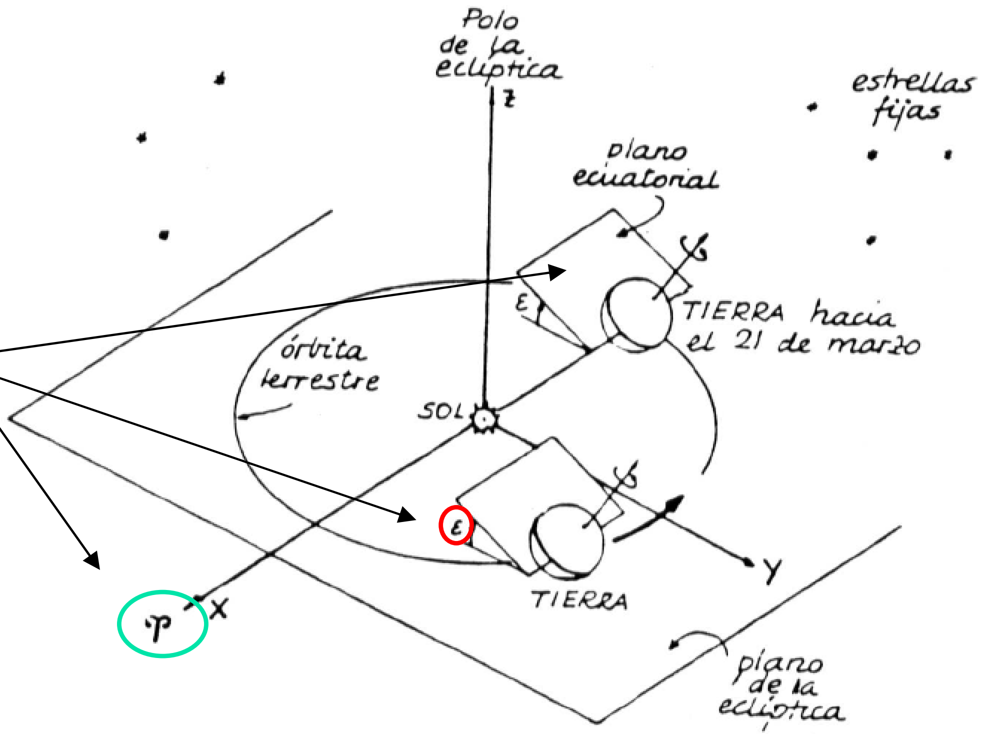
- En este tema se han analizado las trayectorias que puede seguir un cuerpo en su movimiento orbital en torno a otro cuerpo primario bajo la influencia de su campo gravitatorio, pero no se ha considerado la orientación de las órbitas con respecto al cuerpo primario.
- El análisis de esta orientación es, sin embargo, necesario si se desea conocer la posición precisa del cuerpo en cada instante de tiempo (por ejemplo, la posición de la Tierra respecto del Sol, o la de un satélite respecto de la Tierra).
- Es necesario considerar sistemas de coordenadas adecuados.
  - Sistema de coordenadas heliocéntrico:
    - permite estudiar el movimiento alrededor del Sol
  - Sistema de coordenadas geocéntrico:
    - estudio del movimiento de satélites alrededor de la Tierra

Sistemas de Coordenadas - II

Punto Aries

oblicuidad

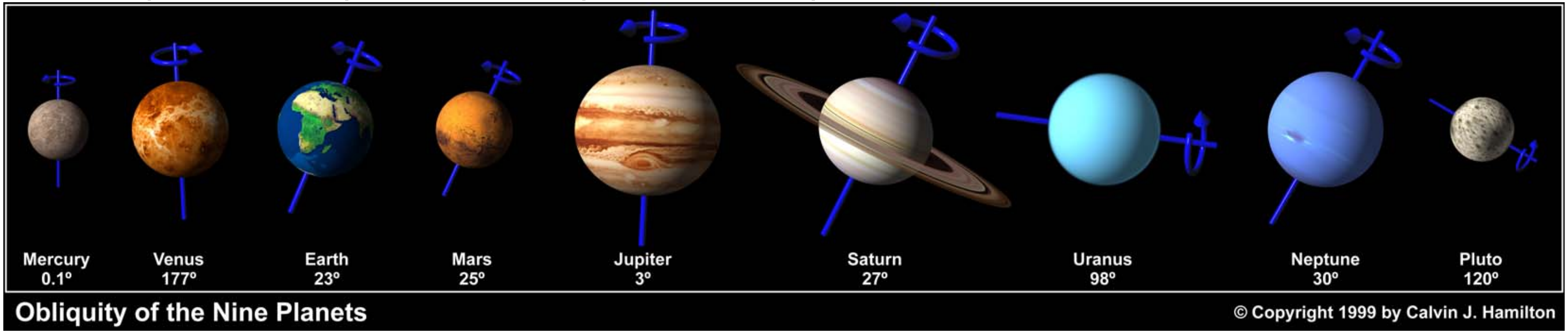
Plano ecuatorial

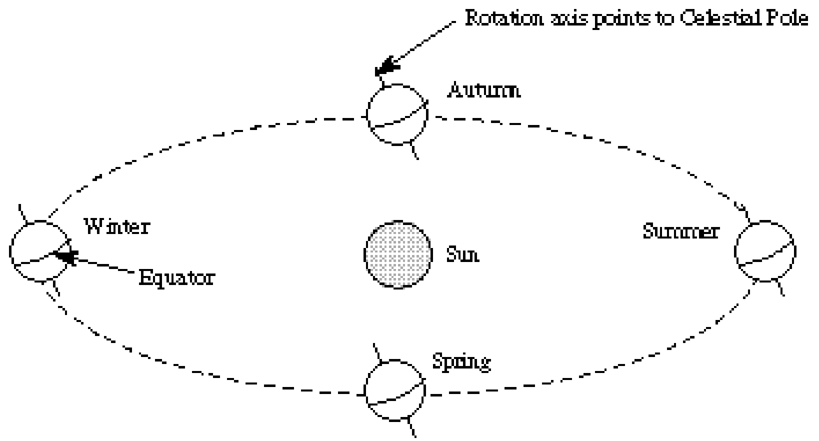


- Sistema de coordenadas heliocéntrico:
  - Permite estudiar el movimiento alrededor del Sol
  - Tiene por origen el centro de masas del Sol
  - Plano fundamental es el plano de la eclíptica
    - la órbita de la Tierra alrededor del Sol)
  - Dirección fundamental la línea Sol-Tierra en el equinoccio vernal (o de primavera para el hemisferio Norte).
  - Los equinoccios son dos instantes en los que el plano ecuatorial terrestre contiene al centro del Sol
    - Equinoccio vernal - 21 de marzo,
    - Equinoccio de otoño - del 21 de septiembre (para el hemisferio Norte).
    - La dirección fundamental recibe el nombre de punto Aries
    - El ángulo que forma el plano ecuatorial terrestre con el de la eclíptica es $\varepsilon \approx 23.4º$ (oblicuidad).
    - Las coordenadas angulares esféricas en este sistema son:
      - la longitud celeste (λ)
      - la latitud celeste (β)

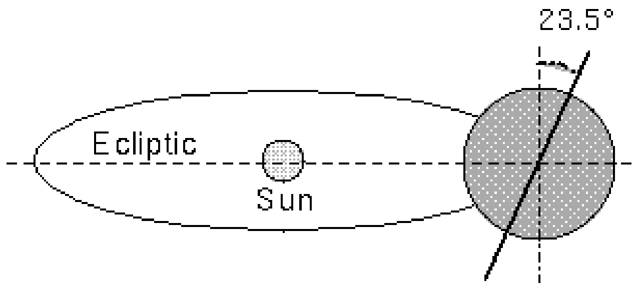
Sistemas de Coordenadas - II

- Oblicuidad de los planetas: La oblicuidad es el ángulo entre el plano ecuatorial de un planeta y su plano orbital.
- Por convención de la Unión Astronómica Internacional (IAU), el polo norte de un planeta está por encima del plano de la eclíptica.





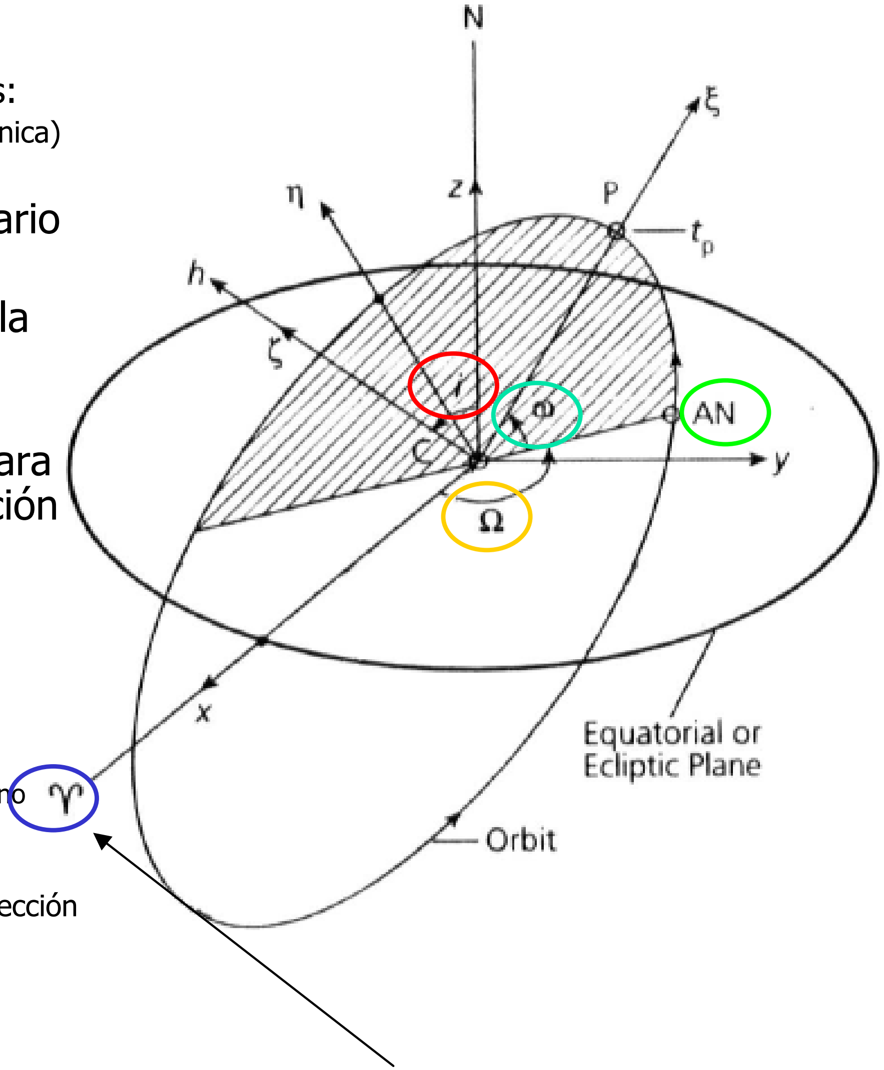
Earth's rotation axis always pointed to Celestial Poles. As Earth moves around Sun sometimes one hemisphere is tilted toward the Sun and sometimes away. The seasons shown are for the Northern hemisphere. The southern hemisphere's seasons are opposite to those shown.



Earth's rotation axis is tilted by 23.5° with respect to the ecliptic (its orbital plane).

Sistemas de Coordenadas - III

- Elementos Orbitales:
  - Para definir la geometría de una órbita bastan 2 parámetros:
    - la excentricidad ***e***, que define la forma de la órbita (el tipo de cónica)
    - el parámetro ***p***, que define su tamaño.
- Para dar una descripción completa de la órbita es necesario definir su orientación.
- Para describir el movimiento de un cuerpo a lo largo de la misma es necesario fijar una referencia que permita posicionarlo inicialmente.
- Para definir la orientación se necesitan 3 ángulos: dos para definir el plano de la órbita y uno para definir la orientación de la órbita en su propio plano.
  - la **inclinación** (**i**)
    - ángulo formado por el plano de la órbita y el plano fundamental
  - la **ascensión** recta del nodo ascendente (Ω):
    - ángulo, medido hacia el Este, formado por la dirección del nodo ascendente ***AN*** y la dirección fundamental
      - el nodo ascendente es el punto en que el vehículo cruza el plano fundamental en el sentido Sur-Norte
  - el **argumento del periapsis** (ω):
    - ángulo, medido en el sentido del movimiento, formado por la dirección del periapsis y la del nodo ascendente.
  - el **tiempo de paso por el periapsis** ($\mathbf{t_p}$):
    - Para definir la posición del vehiculo en la órbita
- Elementos orbitales: **e, p, i,** Ω**,** ω**,** $\mathbf{t_p}$



Punto Aries

Bibliografía

- [Riv07] Damián Rivas. Aeronaves y Vehículos Espaciales, Febrero de 2007.
- Wikipedia, http://es.wikipedia.org
- NASA, http://www.nasa.gov
- The Boeing Company, http://www.boeing.com