

Mecánica del Vuelo

4º Curso de Grado en Ingeniería Aeroespacial

Introducción a la Estabilidad Dinámica de Aviones

Francisco Gavilán Jiménez
Damián Rivas Rivas

Curso 2013-2014

Índice

1. Introducción a la estabilidad dinámica de aviones	1
2. Estabilidad Dinámica Longitudinal	4
3. Estabilidad Dinámica Lateral-Direccional	8
A. Avión de ejemplo	13

1. Introducción a la estabilidad dinámica de aviones

En estas páginas se va a hacer un estudio de la estabilidad dinámica del movimiento de perturbación del avión, a partir de una condición de vuelo de referencia correspondiente con un crucero a altitud y velocidad constantes.

En Mecánica del Vuelo, se dice que un avión es dinámicamente estable si *ante cualquier perturbación respecto a la condición de vuelo de referencia, la amplitud de las variables de perturbación tiende a cero cuando el tiempo tiende a infinito*.

Nótese la diferencia con el concepto de estabilidad estática de aviones, el cual está relacionado con la generación de fuerzas y momentos recuperadores ante una perturbación de la condición de equilibrio (sin analizar si efectivamente se acaba recuperando dicha condición de vuelo de referencia).

Para realizar el análisis de estabilidad dinámica, se parte de las ecuaciones linealizadas longitudinales y laterales-direccionales (ambos problemas están desacoplados). De manera genérica, cada uno de estos sistemas de ecuaciones diferenciales lineales puede escribirse de la siguiente forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}, \quad (1)$$

siendo \mathbf{x} y \mathbf{u} los vectores de estados y de señales de control, respectivamente.

Por el momento, se va a analizar el movimiento libre del avión (con los controles fijos en la posición correspondiente al vuelo de referencia, esto es, $\mathbf{u} = 0$). Además, para una condición

de vuelo de referencia, la matriz de transición de estados (\mathbf{A}) es constante, por lo que (1) se convierte en un sistema autónomo, lineal e invariante en el tiempo.

De este modo, la solución de (1) será de la forma:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 e^{\lambda t}, \quad (2)$$

y sustituyendo en (1) queda:

$$\lambda \mathbf{x}_0 e^{\lambda t} = \mathbf{A} \mathbf{x}_0 e^{\lambda t} \Rightarrow (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{x}_0 = 0. \quad (3)$$

Para que la ecuación anterior tenga distinta de la trivial, tiene que cumplirse:

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0, \quad (4)$$

esto es, estamos ante un problema de cálculo de autovalores de la matriz \mathbf{A} .

Teniendo en cuenta que la ecuación característica que se obtiene de (4) tendrá distintas raíces, se puede escribir de forma genérica la solución del sistema de la siguiente manera:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_i \mathbf{x}_{0_i} e^{\lambda_i t}, \quad (5)$$

donde \mathbf{x}_{0_i} denota el autovector asociado al autovalor λ_i . Cada sumando $\mathbf{x}_{0_i} e^{\lambda_i t}$ constituye un modo del sistema.

Además, por ser \mathbf{A} real, los autovalores serán reales o complejos conjugados, de manera que el autovector asociado a un autovalor real será también real, y si se tienen dos autovalores complejos conjugados, los autovectores asociados también serán complejos conjugados.

El carácter de cada modo vendrá fijado por su autovalor asociado, teniéndose las siguientes posibilidades:

- Autovalor real:
 - negativo: convergencia pura,
 - positivo: divergencia pura.
- Autovalor complejo:
 - parte real negativa: oscilación convergente,
 - parte real positiva: oscilación divergente.

Para que el avión sea inestable, basta con que uno de sus modos lo sea.

En el caso de tener dos autovalores complejos conjugados, los modos asociados aparecerán en la solución final de la forma:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}_1 e^{\lambda_1 t} + \mathbf{a}_2 e^{\lambda_2 t} + \dots, \quad (6)$$

y teniendo en cuenta que $\lambda_1 = n + i\omega$ y $\lambda_2 = n - i\omega$, junto con $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2^*$, puede escribirse:

$$\mathbf{a}_1 e^{\lambda_1 t} + \mathbf{a}_2 e^{\lambda_2 t} = e^n (\mathbf{A}_1 \cos \omega t + \mathbf{A}_2 \sin \omega t), \quad (7)$$

siendo $\mathbf{A}_1 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ y $\mathbf{A}_2 = i(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2)$.

Nótese que las partes real e imaginaria de un autovalor complejo permiten conocer directamente la atenuación de la oscilación (parte real) y la frecuencia de la misma (parte imaginaria).

Al mismo tiempo, a partir de dicho valor, resulta trivial obtener el amortiguamiento y la frecuencia natural del modo:

$$\omega_n = \sqrt{n^2 + \omega^2} \quad (8)$$

$$\xi = \frac{-n}{\omega_n} \quad (9)$$

Además, en función de cada autovalor, pueden obtenerse los siguientes parámetros de cada modo asociado:

■ **Tiempo mitad (doble)**

Es el tiempo que transcurre hasta reducir a la mitad (o doblar, para un modo inestable) la amplitud del modo.

Para modos reales, el tiempo mitad viene dado por:

$$\frac{1}{2}\mathbf{x}_{0j} = \mathbf{x}_{0j}e^{\lambda_j t_{1/2}} \Rightarrow t_{1/2} = \frac{\ln(1/2)}{\lambda_j} = \frac{-0,693}{\lambda_j},$$

mientras que el tiempo doble es:

$$2\mathbf{x}_{0j} = \mathbf{x}_{0j}e^{\lambda_j t_2} \Rightarrow t_2 = \frac{\ln(2)}{\lambda_j} = \frac{0,693}{\lambda_j},$$

Si se tienen modos complejos, el tiempo mitad (o doble) se mide en la envolvente de la oscilación, la cual puede expresarse de la forma:

$$E_j(t) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} e^{n_j t}, \quad (10)$$

por lo que se tendrá:

$$t_{1/2} = \frac{\ln(1/2)}{n_j} = \frac{-0,693}{n_j},$$

$$t_2 = \frac{\ln(2)}{n_j} = \frac{0,693}{n_j}.$$

■ **Periodo (modos oscilatorios)**

Se obtiene a partir de la frecuencia de oscilación de cada modo (parte imaginaria del mismo):

$$T_j = \frac{2\pi}{\omega_j}$$

■ **Ciclos para doblar la amplitud, o reducirla a la mitad (modos oscilatorios)**

Al ser la frecuencia de oscilación constante, el número de ciclos N a lo largo de un intervalo de tiempo t es:

$$N = \frac{\omega}{2\pi} t.$$

Introduciendo el tiempo doble o el tiempo mitad, se obtiene en número de ciclos que transcurre hasta que se dobla (o se reduce a la mitad) la amplitud de la oscilación:

$$N_2 = \frac{\omega}{2\pi} t_2 = 0,110 \frac{\omega}{n}.$$

$$N_{1/2} = \frac{\omega}{2\pi} t_{1/2} = -0,110 \frac{\omega}{n}.$$

■ Decremento logarítmico (modos oscilatorios)

Es el ratio entre las amplitudes de una oscilación al transcurrir un periodo de la misma (en la práctica, se suele tomar el cociente entre dos picos (o valles) consecutivos). Viene dado por:

$$\delta = \frac{e^{nt}}{e^{n(t+T)}} = -nT.$$

Introduciendo la definición de la frecuencia natural ($\omega_n = \sqrt{n^2 + \omega^2}$) y del amortiguamiento ($\xi = \frac{-n}{\omega_n}$), puede escribirse:

$$\delta = 2\pi \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}.$$

2. Estabilidad Dinámica Longitudinal

Las ecuaciones del movimiento linealizadas adimensionales, en ejes estabilidad, se escriben de la siguiente manera:

$$2\mu \frac{d\hat{u}}{d\hat{t}} = (2C_{X_s} + C_{X_{\hat{u}}}) \hat{u} + C_{X_\alpha} \alpha + C_{Z_s} \theta, \quad (11)$$

$$(2\mu - C_{Z_{\hat{\alpha}}}) \frac{d\alpha}{d\hat{t}} = (2C_{Z_s} + C_{Z_{\hat{u}}}) \hat{u} + C_{Z_\alpha} \alpha + (2\mu + C_{Z_{\hat{q}}}) \hat{q} - C_{X_s} \theta + C_{Z_{\delta_e}} \delta_e, \quad (12)$$

$$\hat{I}_y \frac{d\hat{q}}{d\hat{t}} - C_{m_{\hat{\alpha}}} \frac{d\alpha}{d\hat{t}} = C_{m_{\hat{u}}} \hat{u} + C_{m_\alpha} \alpha + C_{m_{\hat{q}}} \hat{q} + C_{m_{\delta_e}} \delta_e + C_{m_{\hat{\delta_e}}} \hat{\delta_e}, \quad (13)$$

$$\frac{d\theta}{d\hat{t}} = \hat{q}, \quad (14)$$

donde la definición de las distintas variables adimensionales se ha realizado de la siguiente manera:

$$C_X = \frac{X}{\frac{1}{2}\rho V^2 S}, \quad C_Z = \frac{Z}{\frac{1}{2}\rho V^2 S}, \quad C_m = \frac{M}{\frac{1}{2}\rho V^2 S c},$$

$$\hat{u} = \frac{u}{u_s}, \quad \hat{w} = \frac{w}{u_s} = \alpha, \quad \hat{q} = \frac{q}{2\frac{u_s}{c}},$$

$$\hat{t} = \frac{t}{\frac{c}{2u_s}}, \quad \mu = \frac{m}{\frac{1}{2}\rho S c}, \quad \hat{I}_y = \frac{I_y}{\rho S \left(\frac{c}{2}\right)^3}.$$

Además, hay que tener en cuenta que las ecuaciones (11)–(14) definen el movimiento de perturbación respecto a una condición de vuelo de referencia, correspondiente a un vuelo rectilíneo uniforme, por lo que las fuerzas y momentos de dicha condición de vuelo satisfacen:

$$0 = -mg \sin \theta_s + X_s \quad \Rightarrow \quad C_{X_s} = \frac{gc}{u_s^2} \mu \sin \theta_s, \quad (15)$$

$$0 = mg \cos \theta_s + Z_s \quad \Rightarrow \quad C_{Z_s} = -\frac{gc}{u_s^2} \mu \cos \theta_s. \quad (16)$$

$$0 = C_{m_s}. \quad (17)$$

Por comodidad, se va a considerar en todo momento un vuelo horizontal, por lo que $\theta_s = 0$, lo que implica que $C_{X_s} = 0$. También se va a ignorar la derivada de estabilidad $C_{m_{\hat{\delta_e}}}$.

Finalmente, si se deja fijo el mando de profundidad en el valor correspondiente a la condición de vuelo de referencia, el sistema de ecuaciones longitudinal queda:

$$2\mu \frac{d\hat{u}}{d\hat{t}} = C_{X_{\hat{u}}}\hat{u} + C_{X_{\alpha}}\alpha + C_{Z_s}\theta, \quad (18)$$

$$(2\mu - C_{Z_{\hat{\alpha}}}) \frac{d\alpha}{d\hat{t}} = (2C_{Z_s} + C_{Z_{\hat{u}}})\hat{u} + C_{Z_{\alpha}}\alpha + (2\mu + C_{Z_{\hat{q}}})\hat{q}, \quad (19)$$

$$\hat{I}_y \frac{d\hat{q}}{d\hat{t}} - C_{m_{\hat{\alpha}}}\frac{d\alpha}{d\hat{t}} = C_{m_{\hat{u}}}\hat{u} + C_{m_{\alpha}}\alpha + C_{m_{\hat{q}}}\hat{q}, \quad (20)$$

$$\frac{d\theta}{d\hat{t}} = \hat{q}, \quad (21)$$

Las soluciones de este sistema de ecuaciones diferenciales serán del tipo:

$$\hat{u}(\hat{t}) = \hat{u}_0 e^{\hat{\lambda}\hat{t}}, \quad \alpha(\hat{t}) = \alpha_0 e^{\hat{\lambda}\hat{t}}, \quad (22)$$

$$\hat{q}(\hat{t}) = \hat{q}_0 e^{\hat{\lambda}\hat{t}}, \quad \theta(\hat{t}) = \theta_0 e^{\hat{\lambda}\hat{t}}, \quad (23)$$

por lo que el sistema de ecuaciones anterior se transforma en:

$$\begin{bmatrix} 2\mu\hat{\lambda} - C_{X_{\hat{u}}} & -C_{X_{\alpha}} & 0 & -C_{Z_s} \\ -(2C_{Z_s} + C_{Z_{\hat{u}}}) & (2\mu - C_{Z_{\hat{\alpha}}})\hat{\lambda} - C_{Z_{\alpha}} & -(2\mu + C_{Z_{\hat{q}}}) & 0 \\ -C_{m_{\hat{u}}} & -C_{m_{\hat{\alpha}}}\hat{\lambda} - C_{m_{\alpha}} & \hat{I}_y\hat{\lambda} - C_{m_{\hat{q}}} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \hat{\lambda} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_0 \\ \alpha_0 \\ \hat{q}_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix} e^{\hat{\lambda}\hat{t}} = \mathbf{0}. \quad (24)$$

Teniendo en cuenta que $e^{\hat{\lambda}\hat{t}} \neq 0$, para que este sistema tenga solución distinta de la trivial, se tiene que cumplir:

$$\begin{vmatrix} 2\mu\hat{\lambda} - C_{X_{\hat{u}}} & -C_{X_{\alpha}} & 0 & -C_{Z_s} \\ -(2C_{Z_s} + C_{Z_{\hat{u}}}) & (2\mu - C_{Z_{\hat{\alpha}}})\hat{\lambda} - C_{Z_{\alpha}} & -(2\mu + C_{Z_{\hat{q}}}) & 0 \\ -C_{m_{\hat{u}}} & -C_{m_{\hat{\alpha}}}\hat{\lambda} - C_{m_{\alpha}} & \hat{I}_y\hat{\lambda} - C_{m_{\hat{q}}} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \hat{\lambda} \end{vmatrix} = 0. \quad (25)$$

A partir de este determinante se obtendrá un polinomio de cuarto grado conocido como **cuártica de estabilidad**:

$$A\hat{\lambda}^4 + B\hat{\lambda}^3 + C\hat{\lambda}^2 + D\hat{\lambda} + E = 0, \quad (26)$$

cuyas raíces serán los autovalores del sistema. Nótese que al haber escrito las ecuaciones longitudinales en su forma adimensional, los autovalores resultantes de la ecuación anterior también serán adimensionales (nótese la diferencia con los autovalores resultantes del determinante (4), los cuales tienen dimensiones [Tiempo⁻¹]). De forma general, en aviones convencionales, de la ecuación (26) resultarán dos pares de autovalores complejos conjugados, los cuales se corresponden con los dos modos existentes en la dinámica longitudinal de aviones: un modo rápido y con amortiguamiento grande (**corto periodo**) y otro modo mucho más lento y menos amortiguado (**fugoide**).

El cálculo de las raíces de la ecuación anterior permitirá conocer el carácter de los modos longitudinales (distinguiendo si son estables o inestables, y oscilatorios o no oscilatorios), además de proporcionar otros parámetros globales de cada modo, como es la frecuencia natural, amortiguamiento, tiempo mitad/doble, etc. Para obtener una información más detallada, identificando cómo es el comportamiento de las distintas variables de estado asociado a cada modo, es necesario calcular también los autovectores del sistema.

Para obtener cada autovector $\mathbf{x}_{0j} = [\hat{u}_{0j} \ \alpha_{0j} \ \hat{q}_{0j} \ \theta_{0j}]^T$ asociado a cada autovalor $\hat{\lambda}_j$, sólo habrá que resolver el sistema que se deriva de la ecuación (24), esto es:

$$\begin{bmatrix} 2\mu\hat{\lambda}_j - C_{X_{\hat{u}}} & -C_{X_{\alpha}} & 0 & -C_{Z_s} \\ -(2C_{Z_s} + C_{Z_{\hat{u}}}) & (2\mu - C_{Z_{\hat{\alpha}}})\hat{\lambda}_j - C_{Z_{\alpha}} & -(2\mu + C_{Z_{\hat{q}}}) & 0 \\ -C_{m_{\hat{u}}} & -C_{m_{\hat{\alpha}}}\hat{\lambda}_j - C_{m_{\alpha}} & \hat{I}_y\hat{\lambda}_j - C_{m_{\hat{q}}} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \hat{\lambda}_j \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_{0j} \\ \alpha_{0j} \\ \hat{q}_{0j} \\ \theta_{0j} \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (27)$$

Teniendo en cuenta que el sistema anterior no tienen rango completo, el sistema anterior se puede resolver dividiendo todas las componentes del autovector por θ_{0j} y eliminando la última ecuación (se puede comprobar que es linealmente dependiente de las tres restantes). De este modo, se tiene:

$$\begin{bmatrix} 2\mu\hat{\lambda}_j - C_{X_{\hat{u}}} & -C_{X_{\alpha}} & 0 \\ -(2C_{Z_s} + C_{Z_{\hat{u}}}) & (2\mu - C_{Z_{\hat{\alpha}}})\hat{\lambda}_j - C_{Z_{\alpha}} & -(2\mu + C_{Z_{\hat{q}}}) \\ -C_{m_{\hat{u}}} & -C_{m_{\hat{\alpha}}}\hat{\lambda}_j - C_{m_{\alpha}} & \hat{I}_y\hat{\lambda}_j - C_{m_{\hat{q}}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_{0j}/\theta_{0j} \\ \alpha_{0j}/\theta_{0j} \\ \hat{q}_{0j}/\theta_{0j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{Z_s} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (28)$$

y resolviendo el sistema anterior se obtiene el autovector:

$$\mathbf{x}_{0j} = [\hat{u}_{0j}/\theta_{0j} \ \alpha_{0j}/\theta_{0j} \ \hat{q}_{0j}/\theta_{0j} \ 1]^T. \quad (29)$$

Nótese que el módulo del vector anterior no es relevante, únicamente importa la relación entre sus distintas componentes. Así, sin pérdida de generalidad, se puede considerar que $\theta_{0j} = 1$ (se toma esta variable de estado como referencia). Si además se tiene en cuenta que los autovalores presentes en la dinámica longitudinal de aviones convencionales son dos pares de complejos conjugados, los autovectores asociados también serán complejos conjugados, pudiendo escribir sus componentes en términos de su módulo y fase:

$$\mathbf{x}_{0j} = [|\hat{u}_{0j}|e^{i\varphi_{j\hat{u}}} \ |\alpha_{0j}|e^{i\varphi_{j\alpha}} \ |\hat{q}_{0j}|e^{i\varphi_{j\hat{q}}} \ 1]^T. \quad (30)$$

A partir de este vector, la evolución temporal de cada variable de estado asociada a cada modo “j” puede escribirse de la forma:

$$\hat{u}_j(\hat{t}) = 2e^{\hat{n}_j\hat{t}} |\hat{u}_{0j}| \cos(\hat{\omega}_j\hat{t} + \varphi_{j\hat{u}}), \quad (31)$$

$$\alpha_j(\hat{t}) = 2e^{\hat{n}_j\hat{t}} |\alpha_{0j}| \cos(\hat{\omega}_j\hat{t} + \varphi_{j\alpha}), \quad (32)$$

$$\hat{q}_j(\hat{t}) = 2e^{\hat{n}_j\hat{t}} |\hat{q}_{0j}| \cos(\hat{\omega}_j\hat{t} + \varphi_{j\hat{q}}), \quad (33)$$

$$\theta_j(\hat{t}) = 2e^{\hat{n}_j\hat{t}} \cos(\hat{\omega}_j\hat{t}), \quad (34)$$

donde \hat{n}_j y $\hat{\omega}_j$ representan ahora las partes real e imaginaria del autovalor adimensional $\hat{\lambda}_j$.

A continuación se va a pasar a estudiar detenidamente cómo son los modos presentes en aviones convencionales. Para ello, se va a considerar un avión de ejemplo (concretamente un Boeing 747), cuyos parámetros aerodinámicos se detallan en el Apéndice A. La cuártica de estabilidad de esta aeronave en las condiciones de vuelo consideradas es:

$$\lambda^4 + 0,7499027\lambda^3 + 0,9340990\lambda^2 + 0,009427345\lambda + 0,004153770 = 0. \quad (35)$$

Nótese que, por conveniencia, esta ecuación se ha escrito en su forma dimensional, la cual se obtiene a partir de la ecuación adimensional sin más que dividir $\hat{\lambda}$ por el tiempo característico longitudinal, esto es $\lambda = \hat{\lambda} \cdot 2u_s/c$.

Resolviendo la ecuación (35), se obtienen los siguientes pares de raíces complejas conjugadas:

$$\lambda_1, \bar{\lambda}_1 = -0,00329204 \pm 0,0669412 i, \quad (36)$$

$$\lambda_2, \bar{\lambda}_2 = -0,371659 \pm 0,886894 i. \quad (37)$$

Como se comentó antes, estos autovalores se corresponden con dos modos estables y oscilatorios: el modo fugoide (claramente más lento), y el modo de corto periodo.

Para ilustrar mejor estos modos, se puede calcular la frecuencia natural, el amortiguamiento, el periodo, el tiempo mitad y en número de ciclos para reducir la amplitud a la mitad. Así, considerando el modo fugoide, a partir de λ_1 se obtienen los siguientes valores:

$$\begin{aligned} \text{Fugoide : } \quad \omega_n &= 0,0670 \text{ rad/s}, \quad \xi = 0,0491, \quad T = 93,9 \text{ s}, \\ t_{1/2} &= 211 \text{ s}, \quad N_{1/2} = 2,24. \end{aligned} \quad (38)$$

A partir de estos valores, se puede ver el modo fugoide como una oscilación de baja frecuencia y muy poco amortiguada, siendo claramente perceptible por parte de la tripulación.

Respecto al modo de corto periodo, a partir de λ_2 se obtiene:

$$\begin{aligned} \text{Corto periodo : } \quad \omega_n &= 0,9616 \text{ rad/s}, \quad \xi = 0,3865, \quad T = 7,08 \text{ s}, \\ t_{1/2} &= 1,86 \text{ s}, \quad N_{1/2} = 0,262. \end{aligned} \quad (39)$$

Nótese que tanto el periodo como el tiempo necesario para la atenuación del modo de corto periodo son prácticamente un orden de magnitud inferior a los del modo fugoide. Se puede entender así que, ante una perturbación en las condiciones de vuelo, el modo de corto periodo se estabilizara rápidamente, mientras que la oscilación restante estará asociada al modo fugoide.

Para entender mejor cómo es el movimiento del avión asociado a estos modos, a continuación se van a proporcionar las componentes de los autovectores asociados a los mismos.

$$\text{Fugoide : } \quad \hat{u}_{01} = 0,62_{\angle 92,4^\circ}, \quad \alpha_{01} = 0,036_{\angle 82,8^\circ}, \quad \hat{q}_{01} = 0,0012_{\angle 92,8^\circ}, \quad \theta_{01} = 1_{\angle 0^\circ}, \quad (40)$$

$$\text{Corto periodo : } \quad \hat{u}_{02} = 0,029_{\angle 57,4^\circ}, \quad \alpha_{02} = 1,08_{\angle 19,2^\circ}, \quad \hat{q}_{02} = 0,017_{\angle 112,7^\circ}, \quad \theta_{02} = 1_{\angle 0^\circ}. \quad (41)$$

Como se puede apreciar, el modo fugoide es una oscilación de baja frecuencia en la que se producen cambios principalmente en velocidad y ángulo de cabeceo, mientras que tanto el ángulo de ataque como la velocidad angular de cabeceo permanecen prácticamente constantes (nótese el pequeño módulo de las componentes asociadas a estas variables de estado en el autovector del fugoide). Para entender cómo se mueve el avión durante el fugoide, se puede pensar en la respuesta del mismo ante una perturbación en la velocidad de vuelo, con la siguiente secuencia de acontecimientos:

1. Si aumenta la velocidad de vuelo (a ángulo de ataque y empuje constantes), el avión empezará a subir, por lo que el ángulo de asiento de la velocidad $\gamma = \theta - \alpha \approx \theta$ empezará a crecer (nótese que α es prácticamente nulo durante el fugoide).
2. Durante el ascenso el avión irá disminuyendo su velocidad, hasta que llegue un momento en el que se habrá frenado tanto que no será capaz de mantener el régimen de subida. Esto se puede constatar observando que hay un desfase de aproximadamente 90° entre velocidad y ángulo de cabeceo (que es equivalente al ángulo de trayectoria), por lo que el mínimo de velocidad se producirá cuando $\gamma \approx 0$.
3. A partir de este momento, el avión empezará a descender, decreciendo el ángulo de trayectoria y aumentando la velocidad de vuelo. Cuando el avión llegue a la altitud del vuelo de referencia, la velocidad habrá aumentado hasta igualarse con la de referencia (esto es, $\hat{u} = 0$), pero el ángulo de trayectoria habrá alcanzado su valor mínimo (recuérdese el desfase), por lo que el avión seguirá descendiendo.
4. Durante el descenso, la velocidad se incrementará (por encima de la de referencia), por lo que la sustentación aumentará, haciendo lo mismo el ángulo de trayectoria. Esta situación se mantendrá hasta que se llegue al máximo de velocidad, coincidiendo con un ángulo de trayectoria nulo (se habrá llegado a la altitud mínima de la oscilación).

5. Esta oscilación se mantendrá hasta que la resistencia aerodinámica consiga amortiguarla. Se puede entender así el bajo amortiguamiento presente en el fugaide, gracias a la elevada eficiencia aerodinámica con la que se diseñan los aviones.

Centrándose ahora en el modo de corto periodo, a partir las componentes del autovector (41) se puede ver que el movimiento del avión asociado a este modo involucra principalmente al ángulo de ataque y a la velocidad angular de cabeceo, mientras que la velocidad de vuelo permanece prácticamente constante. Además, el módulo del ángulo de ataque y del ángulo de cabeceo son prácticamente iguales, al mismo tiempo que el desfase entre estas variables es reducido. Esto implica que las variaciones en el ángulo de trayectoria serán pequeñas, por lo que se puede decir que durante el modo de corto periodo el avión se mantiene volando a nivel y a velocidad constantes.

Así, se puede entender el corto periodo como un modo rápido, en el que tras una perturbación en α , el avión tiende a recuperar rápidamente el ángulo de ataque de equilibrio, atenuando la oscilación en tiempos tan pequeños que ni la velocidad de vuelo ni el ángulo de trayectoria sufren variaciones importantes (debido a la elevada inercia). Como se mostrará más adelante, la rigidez que hace que el avión recupere el ángulo de ataque de equilibrio está íntimamente relacionada con el índice de estabilidad estática longitudinal (C_{m_α}), mientras que en el amortiguamiento interviene tanto $C_{m_{\dot{q}}}$ como $C_{m_{\dot{\alpha}}}$. Estas derivadas de estabilidad tienen un efecto sobre el avión mucho mayor que las responsables de atenuar el modo fugaide (principalmente la resistencia aerodinámica), lo cual explica la clara diferencia en el amortiguamiento de ambos modos.

3. Estabilidad Dinámica Lateral-Direccional

Las ecuaciones del movimiento linealizadas adimensionales, en ejes estabilidad, se escriben de la siguiente manera:

$$2\mu \frac{d\beta}{d\hat{t}} = C_{Y_\beta}\beta + C_{Y_{\hat{p}}}\hat{p} + (C_{Y_{\hat{r}}} - 2\mu)\hat{r} - C_{Z_s}\phi + C_{Y_{\delta_r}}\delta_r, \quad (42)$$

$$\hat{I}_x \frac{d\hat{p}}{d\hat{t}} - \hat{I}_{xz} \frac{d\hat{r}}{d\hat{t}} = C_{l_\beta}\beta + C_{l_{\hat{p}}}\hat{p} + C_{l_{\hat{r}}}\hat{r} + C_{l_{\delta_a}}\delta_a + C_{l_{\dot{\delta}_a}}\dot{\delta}_a + C_{l_{\delta_r}}\delta_r, \quad (43)$$

$$\hat{I}_z \frac{d\hat{r}}{d\hat{t}} - \hat{I}_{xz} \frac{d\hat{p}}{d\hat{t}} = C_{n_\beta}\beta + C_{n_{\hat{p}}}\hat{p} + C_{n_{\hat{r}}}\hat{r} + C_{n_{\delta_a}}\delta_a + C_{n_{\delta_r}}\delta_r + C_{n_{\dot{\delta}_r}}\dot{\delta}_r, \quad (44)$$

$$\frac{d\phi}{d\hat{t}} = \hat{p} + \hat{r} \tan \theta_s \quad (45)$$

$$\frac{d\psi}{d\hat{t}} = \hat{r} \sec \theta_s, \quad (46)$$

donde la definición de las distintas variables adimensionales se ha realizado de la siguiente manera:

$$C_Y = \frac{Y}{\frac{1}{2}\rho V^2 S}, \quad C_l = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho V^2 S b}, \quad C_n = \frac{X}{\frac{1}{2}\rho V^2 S b},$$

$$\hat{v} = \frac{v}{u_s} = \beta, \quad \hat{p} = \frac{pb}{2u_s}, \quad \hat{r} = \frac{rb}{2u_s}, \quad \hat{t} = \frac{t2u_s}{b}$$

$$\mu = \frac{m}{\frac{1}{2}\rho S b}, \quad \hat{I}_x = \frac{I_x}{\rho S \left(\frac{b}{2}\right)^3}, \quad \hat{I}_z = \frac{I_z}{\rho S \left(\frac{b}{2}\right)^3}, \quad \hat{I}_{xz} = \frac{I_{xz}}{\rho S \left(\frac{b}{2}\right)^3}.$$

Nótese que la ecuación (46) está desacoplada, por lo que se eliminará de la formulación que se desarrollará a continuación.

Además, hay que tener en cuenta que las ecuaciones (42)–(45) definen el movimiento de perturbación respecto a una condición de vuelo de referencia, correspondiente a un vuelo rectilíneo uniforme, por lo que las fuerzas y momentos de dicha condición de vuelo satisfacen:

$$0 = -mg \sin \theta_s + X_s \quad \Rightarrow \quad C_{X_s} = \frac{gb}{u_s^2} \mu \sin \theta_s, \quad (47)$$

$$0 = C_{Y_s}, \quad (48)$$

$$0 = mg \cos \theta_s + Z_s \quad \Rightarrow \quad C_{Z_s} = -\frac{gb}{u_s^2} \mu \cos \theta_s. \quad (49)$$

$$0 = C_{l_s}, \quad (50)$$

$$0 = C_{m_s}, \quad (51)$$

$$0 = C_{n_s}. \quad (52)$$

Por comodidad, se va a considerar en todo momento un vuelo horizontal, por lo que $\theta_s = 0$, lo que implica que $C_{X_s} = 0$. También se va a ignorar las contribuciones de las velocidades de deflexión de los alerones y del timón de dirección $C_{l_{\delta_a}} = C_{n_{\delta_r}} = 0$.

Finalmente, si se dejan fijos los mandos de alerones y timón de dirección en los valores correspondientes a la condición de vuelo de referencia, el sistema de ecuaciones lateral-direccional queda:

$$2\mu \frac{d\beta}{dt} = C_{Y_\beta} \beta + C_{Y_{\hat{p}}} \hat{p} + (C_{Y_{\hat{r}}} - 2\mu) \hat{r} - C_{Z_s} \phi, \quad (53)$$

$$\hat{I}_x \frac{d\hat{p}}{dt} - \hat{I}_{xz} \frac{d\hat{r}}{dt} = C_{l_\beta} \beta + C_{l_{\hat{p}}} \hat{p} + C_{l_{\hat{r}}} \hat{r}, \quad (54)$$

$$\hat{I}_z \frac{d\hat{r}}{dt} - \hat{I}_{xz} \frac{d\hat{p}}{dt} = C_{n_\beta} \beta + C_{n_{\hat{p}}} \hat{p} + C_{n_{\hat{r}}} \hat{r}, \quad (55)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \hat{p} + \hat{r} \tan \theta_s, \quad (56)$$

$$(57)$$

Las soluciones de este sistema de ecuaciones diferenciales serán del tipo:

$$\beta(\hat{t}) = \beta_0 e^{\hat{\lambda} \hat{t}}, \quad \hat{p}(\hat{t}) = \hat{p}_0 e^{\hat{\lambda} \hat{t}}, \quad (58)$$

$$\hat{r}(\hat{t}) = \hat{r}_0 e^{\hat{\lambda} \hat{t}}, \quad \phi(\hat{t}) = \phi_0 e^{\hat{\lambda} \hat{t}}, \quad (59)$$

por lo que el sistema de ecuaciones anterior se transforma en:

$$\begin{bmatrix} 2\mu - C_{Y_\beta} & -C_{Y_{\hat{p}}} & -(C_{Y_{\hat{r}}} - 2\mu) & +C_{Z_s} \\ -C_{l_\beta} & \hat{I}_x \hat{\lambda} - C_{l_{\hat{p}}} & -\hat{I}_{xz} \hat{\lambda} - C_{l_{\hat{r}}} & 0 \\ -C_{n_\beta} & -\hat{I}_{xz} \hat{\lambda} - C_{n_{\hat{p}}} & \hat{I}_z \hat{\lambda} - C_{n_{\hat{r}}} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \hat{\lambda} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \hat{p}_0 \\ \hat{r}_0 \\ \phi_0 \end{pmatrix} e^{\hat{\lambda} \hat{t}} = \mathbf{0}. \quad (60)$$

Teniendo en cuenta que $e^{\hat{\lambda} \hat{t}} \neq 0$, para que este sistema tenga solución distinta de la trivial, se tiene que cumplir:

$$\begin{vmatrix} 2\mu - C_{Y_\beta} & -C_{Y_{\hat{p}}} & -(C_{Y_{\hat{r}}} - 2\mu) & +C_{Z_s} \\ -C_{l_\beta} & \hat{I}_x \hat{\lambda} - C_{l_{\hat{p}}} & -\hat{I}_{xz} \hat{\lambda} - C_{l_{\hat{r}}} & 0 \\ -C_{n_\beta} & -\hat{I}_{xz} \hat{\lambda} - C_{n_{\hat{p}}} & \hat{I}_z \hat{\lambda} - C_{n_{\hat{r}}} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \hat{\lambda} \end{vmatrix} = 0. \quad (61)$$

A partir de este determinante se obtiene la **cuártica de estabilidad** para la dinámica lateral-direccional.

$$A\hat{\lambda}^4 + B\hat{\lambda}^3 + C\hat{\lambda}^2 + D\hat{\lambda} + E = 0, \quad (62)$$

En aviones convencionales, a partir de esta ecuación se obtienen los siguientes autovalores:

- $\hat{\lambda}_1$: Real, de módulo muy pequeño (puede ser positivo o negativo). Se corresponde con el **modo espiral**.
- $\hat{\lambda}_2$: Real, de módulo grande. Se corresponde con el **modo de convergencia en balance**.
- $\hat{\lambda}_3, \bar{\lambda}_3$: Par de autovalores complejos conjugados, con parte real negativa (de módulo pequeño). Se corresponden con el **modo de balanceo holandés**.

A continuación, al igual que se hizo con la dinámica longitudinal, se van a usar los parámetros del avión de referencia para resolver numéricamente la ecuación característica y encontrar los autovalores asociados a cada modo. Así, la ecuación característica se puede escribir (en su forma dimensional) de la siguiente manera:

$$\lambda^4 + 0,6358\lambda^3 + 0,9388\lambda^2 + 0,5144\lambda + 0,003682 = 0. \quad (63)$$

Esta ecuación se obtiene a partir de la ecuación característica adimensional (62) haciendo $\lambda = \hat{\lambda} \cdot 2u_s/b$.

Resolviendo la ecuación (63), se obtienen las siguientes raíces, correspondientes con los modos anteriormente descritos:

$$\lambda_1 = -0,0072973 \Rightarrow t_{1/2} = 95 \text{ s} \quad (64)$$

$$\lambda_2 = -0,56248 \Rightarrow t_{1/2} = 1,2 \text{ s} \quad (65)$$

$$\lambda_3, \bar{\lambda}_3 = -0,033011 \pm 0,94655i \Rightarrow T = 6,6 \text{ s}, t_{1/2} = 21 \text{ s}. \quad (66)$$

Respecto a los autovectores, el proceso de cálculo sería análogo al que se expuso en el análisis de estabilidad dinámica longitudinal. Así partir de cada uno de los autovalores que se acaban de exponer, se obtiene lo siguiente:

- **Modo espiral:** el autovector asociado es:

$$\left(\beta_0 \quad \hat{p}_0 \quad \hat{r}_0 \quad \phi_0 \quad \psi_0 \right)^T = \left(-0,00119 \quad 0,000163 \quad -0,000920 \quad -0,177 \quad 1 \right)^T. \quad (67)$$

Como se puede comprobar, se trata de un modo muy lento que involucra fundamentalmente a los ángulos de balance y guiñada, mientras que las variaciones en velocidades angulares y en el ángulo de resbalamiento son sensiblemente más pequeñas. Se puede entender así que este modo sea inherentemente lento, ya que las fuerzas y momentos aerodinámicos dependen precisamente de β , \hat{p} y \hat{r} , de manera que si estas variables son pequeñas, es de esperar que las fuerzas y momentos recuperadores también lo sean.

Para visualizar el movimiento del avión debido al modo espiral, se puede pensar en el respuesta del mismo ante una perturbación que provoque un pequeño ángulo de balance. Puesto que es de esperar que el avión esté trimado para volar con las alas niveladas, aparecerá una componente lateral del peso (en ejes cuerpo) sin compensar, lo que provocará una aceleración lateral que se traducirá en un cierto ángulo de resbalamiento (ver figura 1). Haciendo un análisis simplificado de los momentos aerodinámicos que aparecerán ante esta situación, se puede ver que por una parte, la estabilidad direccional ($C_{n_\beta} > 0$) provocará un momento de guiñada hacia el lado del viraje (tratando de eliminar el ángulo de resbalamiento), mientras que la estabilidad lateral ($C_{l_\beta} < 0$) generará un momento recuperador que ayudará a nivelar las alas (deteniendo el viraje). Se puede intuir así que un valor de C_{l_β} muy negativo contribuirá a estabilizar el modo espiral, mientras que si se aumenta demasiado el índice de estabilidad estática direccional (C_{n_β}) se obtiene el efecto opuesto.

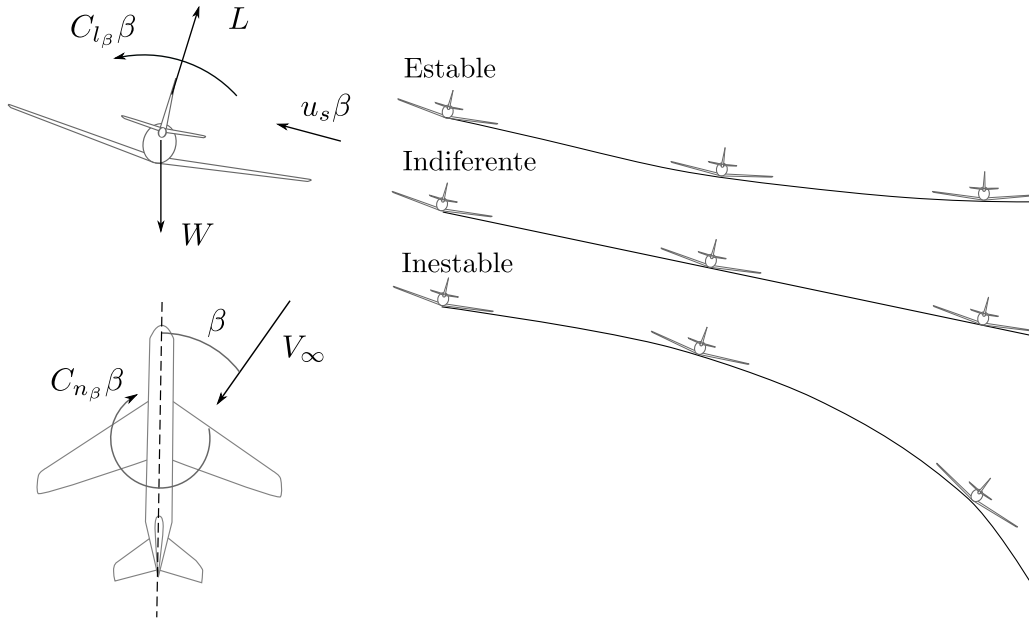


Figura 1: Esquema modo espiral

- **Convergencia en balance:** el autovector asociado es:

$$\left(\beta_0 \quad \hat{p}_0 \quad \hat{r}_0 \quad \phi_0 \quad \psi_0 \right)^T = \left(-0,0198 \quad -0,0712 \quad 0,0040 \quad 1 \quad -0,0562 \right)^T. \quad (68)$$

Como se puede ver, este modo se puede aproximar por un movimiento con un único grado de libertad (rotación en balance). Los parámetros que influyen fundamentalmente en este modo son el amortiguamiento en balance (C_{l_β}) y la inercia respecto al eje longitudinal del avión.

- **Balanceo holandés:** el autovector asociado es:

$$\left(\beta_0 \quad \hat{p}_0 \quad \hat{r}_0 \quad \phi_0 \quad \psi_0 \right)^T = \left(0,33_{\angle -28,10^\circ} \quad 0,12_{\angle 92^\circ} \quad 0,03_{\angle -112,3^\circ} \quad 1_{\angle 0^\circ} \quad 0,31_{\angle 155,7^\circ} \right)^T. \quad (69)$$

Como se puede comprobar, se trata de un modo oscilatorio con un fuerte acoplamiento entre todas las variables de estado de la dinámica lateral-direccional. Además, cabe destacar que las componentes del ángulo de resbalamiento y del ángulo de guiñada son casi opuestas (igual módulo y desfase de 180°), lo cual se traduce en que, durante la oscilación, la aeronave apenas sufrirá desplazamientos laterales, manteniendo un vuelo prácticamente rectilíneo.

Para visualizar el movimiento del avión, se puede pensar en la respuesta del mismo ante una perturbación en guiñada (ver figura 2). Gracias a la estabilidad estática direccional (controlada por C_{n_β}), la aeronave tenderá a girar para anular el ángulo de resbalamiento. Sin embargo, al mismo tiempo, la estabilidad lateral (controlada por C_{l_β}) hace que el avión comience un giro en balance, contrario al viraje requerido para anular el ángulo de resbalamiento, lo cual hace que cuando el avión recupere el rumbo original (situación *a*), tendrá un ángulo de balance distinto del de equilibrio. Al ser un modo oscilatorio, el ángulo de rumbo sobrepasará su valor de equilibrio, de manera que el ángulo de resbalamiento comenzará a ser negativo, y la estabilidad lateral hará que el ángulo de balance decrezca hasta llegar a la situación *b*. A partir de este momento, el avión comenzará el movimiento inverso: recuperando el ángulo de rumbo y aumentando el de balance (esta vez en sentido contrario), manteniendo esta oscilación hasta que sea amortiguada.

Como se puede ver en la figura, resulta bastante ilustrativo observar la trayectoria que describe la punta del ala durante este movimiento, la cual se puede asemejar a una elipse.

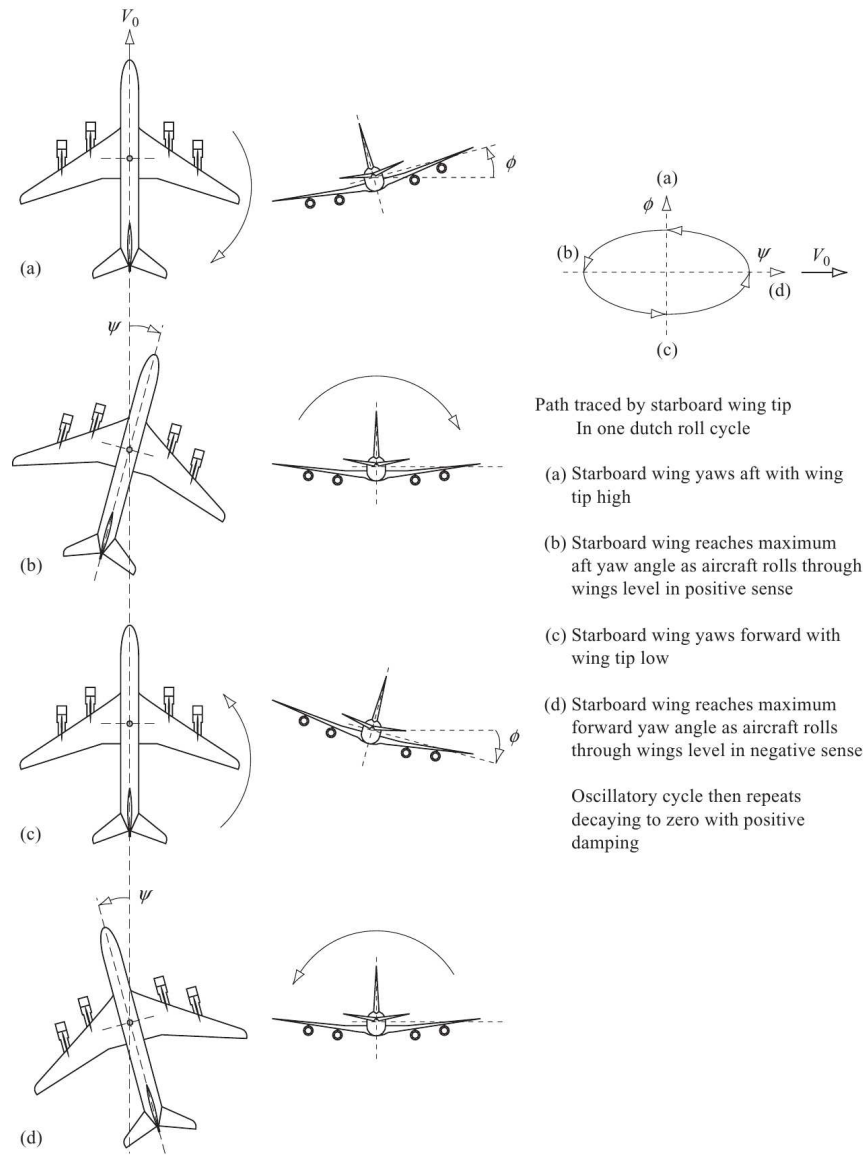


Figura 2: Esquema del balanceo holandés. Imagen obtenida de (Cook, 2007)

Observando este movimiento, se puede entender que las derivadas de estabilidad C_{n_β} y C_{l_β} tienen una influencia opuesta a la que tenían en el modo espiral. Así, un aumento del índice de estabilidad estática direccional contribuye a estabilizar el balanceo holandés (aumentando el momento recuperador que anula el ángulo de guiñada). Por el contrario haciendo más negativo C_{l_β} se consigue un efecto desestabilizador, aumentando las oscilaciones en balance que se producen cuando el avión tiende a anular el ángulo de resbalamiento.

A. Avión de ejemplo

Durante este documento se ha tomado como avión de ejemplo un Boeing 747 volando en crucero a 40000 ft ($\rho = 0,3045 \text{ kg/m}^3$), a Mach 0,8. Sus datos geométricos y máxicos (obtenidos de (B. Etkin and L. D. Reid, 1996)) son:

- Peso: $W = 2831,76 \cdot 10^3 \text{ N}$.
- Superficie, envergadura y cuerda media del ala: $S = 511 \text{ m}^2$, $b = 59,64 \text{ m}$ y $\bar{c} = 8,324 \text{ m}$.
- Inercias: $I_x = 0,247 \cdot 10^8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $I_y = 0,449 \cdot 10^8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $I_z = 0,673 \cdot 10^8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ y $I_{xz} = -0,212 \cdot 10^7 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

Los coeficientes de fuerza según los ejes X y Z asociados a la condición de vuelo de referencia son $C_X = 0$ y $C_{Z_s} = -0,654$ respectivamente. Las derivadas de estabilidad son:

	C_X	C_Z	C_m
\hat{u}	-0.1080	-0.1060	0.1043
α	0.2193	4.920	-1.023
\hat{q}	0	-5.921	-23.92
$\hat{\alpha}$	0	5.896	-6.314

(a) Derivadas longitudinales

	C_Y	C_l	C_n
β	-0.8771	-0.2797	0.1946
\hat{p}	0	-0.3295	-0.04073
\hat{r}	0	0.304	-0.2737

(b) Derivadas laterales-direccionales

Tabla 1: Derivadas de estabilidad de un Boeing 747 ($M = 0,8$; $h = 40000 \text{ ft}$).

Respecto a las potencias de control, se tienen los siguientes valores:

$$C_{Z_{\delta_e}} = -0,3648, \quad C_{m_{\delta_e}} = -1,444, \quad (70)$$

$$C_{l_{\delta_a}} = -0,01368, \quad C_{n_{\delta_a}} = -1,973 \cdot 10^{-3}, \quad (71)$$

$$C_{Y_{\delta_r}} = 0,11465, \quad C_{l_{\delta_r}} = 6,976 \cdot 10^{-3}, \quad C_{n_{\delta_r}} = -0,1257. \quad (72)$$

Referencias

- B. Etkin and L. D. Reid (1996). *Dynamics of Flight. Stability and Control*. John Wiley and Sons, Inc, Third edition.
- Cook, M. V. (2007). *Flight Dynamics Principles*. Elsevier, Second edition.
- McRuer, D., Ashkenas, I., and Graham, D. (1973). *Aircraft Dynamics and Automatic Control*. Princeton University Press.
- Pamadi, B. (2004). *Performance, Stability, Dynamics, and Control of Airplanes*. AIAA Education Series, Second edition.
- Phillips, W. F. (2009). *Mechanics of Flight*. Wiley, Second edition.