

## TEMA 4 ACTUACIONES INTEGRALES

### 4.1 Actuaciones integrales en crucero

Hipótesis de crucero:

- vuelo casi estacionario: aceleraciones despreciables ( $\dot{V} \approx 0, \dot{\gamma} \approx 0$ ),
- ángulo de trayectoria muy pequeño:  $\gamma \ll 1, W\gamma \ll D$ .

Ecuaciones del vuelo de crucero (vuelo simétrico en un plano vertical):

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= V \\ \frac{dh}{dt} &= V\gamma \\ 0 &= T(h, V, \pi) - D(h, V, L) \\ 0 &= L - W \\ \frac{dW}{dt} &= -c_E(h, V, \pi)T(h, V, \pi)\end{aligned}\tag{4.1}$$

En este problema se tienen 2 grados de libertad matemáticos.

Se van a analizar 2 actuaciones integrales: **alcance** y **autonomía** para una carga de combustible dada. Las ecuaciones que permiten calcularlas son las siguientes:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dW} &= \frac{-V}{c_E D(h, V, W)} \\ \frac{dt}{dW} &= \frac{-1}{c_E D(h, V, W)}\end{aligned}\tag{4.2}$$

donde se ha tomado  $W$  como variable independiente y se han utilizado las ecuaciones  $T = D, L = W$ .

Límites de integración:

- la distancia recorrida varía desde  $x_i = 0$  hasta el alcance  $x_f$ ;
- el tiempo de vuelo varía desde  $t_i = 0$  hasta la autonomía  $\theta_f$ ;
- el peso del avión varía desde  $W_i$  hasta  $W_f = W_i - W_F$ , siendo  $W_F$  la carga de combustible.

Se van a considerar tres leyes de pilotaje:

- 1)  $h = \text{const}$  y  $V = \text{const}$ .
- 2)  $h = \text{const}$  y  $C_L = \text{const}$ .
- 3)  $V = \text{const}$  y  $C_L = \text{const}$ .

#### 4.1.1 Alcance.

La ecuación que permite calcular el alcance es (ecuación 4.2):

$$\frac{dx}{dW} = \frac{-V}{c_E D(h, V, W)}\tag{4.3}$$

#### 4.1.1.1 Alcance en vuelo horizontal con $V=\text{const}$

Ahora se tiene un grado de libertad. En el modelo ISJ se tiene  $c_E=\text{const}$  (por ser  $h=\text{const}$ ).

Variables adimensionales:

$$\mu = \frac{W}{W_i}, \quad \theta = \frac{t \cdot c_E}{E_{max}}, \quad \xi = \frac{x \cdot c_E}{E_{max} V_{R_i}}, \quad v = \frac{V}{V_{R_i}} \quad (4.4)$$

siendo  $V_{R_i}$  la velocidad que minimiza la resistencia para la altitud  $\rho$  y el peso  $W_i$ , que viene dada por

$$V_{R_i} = \sqrt{\frac{2W_i}{\rho S}} \left( \frac{k}{C_{D_0}} \right)^{1/4} \quad (4.5)$$

La resistencia viene dada por

$$D = \frac{W_i}{2E_{max}} \left( v^2 + \frac{\mu^2}{v^2} \right) \quad (4.6)$$

Ecuación adimensional:

$$\frac{d\xi}{d\mu} = \frac{-2v^3}{v^4 + \mu^2} \quad (4.7)$$

Límites de integración:

— la distancia adimensional varía desde  $\xi_i = 0$  hasta  $\xi_f$ ;

— el peso del avión adimensional varía desde  $\mu_i=1$  hasta  $\mu_f = 1 - \zeta$ , siendo  $\zeta = \frac{W_F}{W_i}$  la carga de combustible adimensional.

Para integrar esta ecuación es necesario conocer  $v(\mu)$ , correspondiente al grado de libertad matemático que queda libre.

Al ser  $V = \text{const}$ , se tiene  $v = \text{const}$ . La integración de la ecuación (4.7) da lugar al siguiente resultado:

$$\xi_f = 2v \arctan \left[ \frac{v^2 \zeta}{v^4 + (1 - \zeta)} \right] \quad (4.8)$$

**Optimización.** Alcance máximo.

$$\frac{d\xi_f}{dv} = 0 \Rightarrow v|_{(\xi_f)_{max}} \Rightarrow (\xi_f)_{max} = f_n(\zeta) \quad (4.9)$$

**Variables dimensionales.**

Alcance máximo

$$(x_f)_{max} = \frac{E_{max}}{c_E(\rho)} \sqrt{\frac{2W_i}{\rho S}} \left( \frac{k}{C_{D_0}} \right)^{1/4} f_n(\zeta) \quad (4.10)$$

Empuje requerido (el empuje requerido debe ser inferior al empuje máximo disponible)

$$T = D = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_{D_0} + k \frac{W^2}{\frac{1}{2} \rho V^2 S} \quad (4.11)$$

El empuje disminuye a lo largo de la trayectoria.

#### 4.1.1.2 Alcance en vuelo horizontal con $C_L = \text{const}$

A partir de las expresiones  $W = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L$  y  $W_i = \frac{1}{2}\rho V_{R_i}^2 S C_{L_{opt}}$  se obtiene

$$v = c\sqrt{\mu} \quad (4.12)$$

siendo

$$c = \sqrt{\frac{C_{L_{opt}}}{C_L}} = \text{const} \quad (4.13)$$

La ecuación (4.7) queda pues de la siguiente forma:

$$\frac{d\xi}{d\mu} = \frac{-2c^3}{c^4 + 1} \frac{1}{\sqrt{\mu}} \quad (4.14)$$

cuya integración da lugar al siguiente resultado:

$$\xi_f = \frac{4c^3}{1 + c^4} \left(1 - \sqrt{1 - \zeta}\right) \quad (4.15)$$

**Optimización.** Alcance máximo.

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_f}{dc} = 0 &\Rightarrow c|_{(\xi_f)_{max}} = 3^{1/4} \\ (\xi_f)_{max} &= 3^{3/4} \left(1 - \sqrt{1 - \zeta}\right) \\ C_L|_{(\xi_f)_{max}} &= \frac{1}{\sqrt{3}} C_{L_{opt}} \end{aligned} \quad (4.16)$$

**Variables dimensionales.**

Alcance máximo

$$(x_f)_{max} = \frac{E_{max}}{c_E(\rho)} \sqrt{\frac{2W_i}{\rho S}} \left(\frac{k}{C_{D_0}}\right)^{1/4} 3^{3/4} \left(1 - \sqrt{1 - \zeta}\right) \quad (4.17)$$

Empuje requerido (el empuje requerido debe ser inferior al empuje máximo disponible)

$$T = W \frac{C_D}{C_L} \sim W \quad (4.18)$$

(al ser  $C_L = \text{const}$ , también se tiene  $C_D = \text{const}$  en el modelo ISJ).

$$T|_{(x_f)_{max}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{W}{E_{max}} \quad (4.19)$$

Velocidad de vuelo

$$V = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_L}} \sim \sqrt{W} \quad (4.20)$$

El empuje y la velocidad disminuyen a lo largo de la trayectoria.

### Comparación de ambos programas de vuelo.

$$\frac{(x_f)_{max}^\alpha}{(x_f)_{max}^V} = \frac{3^{3/4} (1 - \sqrt{1 - \zeta})}{f_n(\zeta)} > 1 \quad (4.21)$$

#### 4.1.1.3 Alcance en vuelo con $V=\text{const}$ y $C_L=\text{const}$

En este caso  $h$  no es constante, sino que varía a lo largo del crucero. En efecto, a partir de la definición de  $C_L$  y de la ecuación  $L = W$  se tiene

$$W = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_L \quad (4.22)$$

que indica que la altitud aumenta a medida que el peso del avión disminuye (por ser  $V$  y  $C_L$  constantes): se tiene un *cruise climb*.

Hipótesis adicional: En el estudio del *cruise climb* se supone  $c_E=\text{const}$ .

#### Cambio de altitud.

El cambio de altitud del *cruise climb* se obtiene como sigue. Se considera una carga de combustible dada. A partir de la ecuación (4.22) se tiene

$$\frac{W}{\rho} = \frac{W_i}{\rho_i} = \frac{W_f}{\rho_f} \quad (4.23)$$

es decir

$$\frac{\rho_f}{\rho_i} = \frac{W_f}{W_i} = 1 - \zeta \quad (4.24)$$

Esta expresión define el cambio de altitud  $h_f - h_i$ .

Los valores de altitud inicial y final del *cruise climb* vienen dados por

$$\begin{aligned} \rho_i &= \frac{2W_i}{V^2 S C_L} \Rightarrow h_i \\ \rho_f &= \frac{2W_f}{V^2 S C_L} \Rightarrow h_f \end{aligned} \quad (4.25)$$

Las variaciones de altitud son muy pequeñas comparadas con el alcance del avión, lo que da lugar a  $\gamma \ll 1$ , justificando las aproximaciones realizadas.

Ejercicio: comprobar que en la estratosfera el cambio de altitud viene dado por

$$h_f - h_i = \frac{R_g \Theta_{11}}{g} \ln \frac{1}{1 - \zeta} \quad (4.26)$$

#### Alcance.

A partir de las definiciones de  $C_L$  y  $C_D$  y de la ecuación  $L = W$  se tiene

$$D = W \frac{C_D}{C_L} \quad (4.27)$$

Así pues, como  $V, c_E, C_L$  y  $C_D$  son constantes (en el modelo ISJ se tiene  $C_D = \text{const}$  al ser  $C_L = \text{const}$ )

$$x_f = -\frac{V C_L}{c_E C_D} \int_{W_i}^{W_f} \frac{dW}{W} = \frac{V C_L}{c_E C_D} \ln \frac{W_i}{W_f} \quad (4.28)$$

y también

$$x_f = \frac{V C_L}{c_E C_D} \ln \frac{1}{1 - \zeta} \quad (4.29)$$

Esta expresión recibe el nombre de fórmula de Breguet (**Breguet range equation**).

### Optimización.

El valor de  $C_L$  que hace que el alcance sea máximo, para una carga de combustible dada, es el que hace que la eficiencia aerodinámica  $E = C_L/C_D$  sea máxima, esto es, el  $C_L$  óptimo  $C_{L_{opt}} = \sqrt{C_{D_0}/k}$ . El alcance máximo viene dado por

$$(x_f)_{max} = \frac{V E_{max}}{c_E} \ln \frac{1}{1 - \zeta} \quad (4.30)$$

### Cruise climb con altitud inicial dada.

Si se fija la altitud inicial del *cruise climb* ( $\rho_i$ ),  $V$  y  $C_L$  dejan de ser independientes, estando relacionados por

$$\frac{1}{2} \rho_i V^2 S C_L = W_i \quad (4.31)$$

es decir, se tiene

$$V = \sqrt{\frac{2W_i}{\rho_i S C_L}} \quad (4.32)$$

El coeficiente de sustentación que maximiza el alcance es ahora

$$C_L|_{(x_f)_{max}} = \sqrt{\frac{C_{D_0}}{3k}} \quad (4.33)$$

siendo

$$(x_f)_{max} = \frac{E_{max}}{c_E(\rho_i)} \sqrt{\frac{2W_i}{\rho_i S}} \left(\frac{k}{C_{D_0}}\right)^{1/4} \frac{3^{3/4}}{2} \ln \frac{1}{1 - \zeta} \quad (4.34)$$

### Comparación de los programas de vuelo.

En la figura 4.1 se representa una comparación entre el *cruise climb* y los dos casos de crucero horizontal, en el supuesto en que el *cruise climb* se inicie a la altitud a la que tienen lugar los cruceros horizontales.

Comparado con el crucero horizontal de  $C_L$  constante, se tiene

$$\frac{(x_f)_{max}^{V,\alpha}}{(x_f)_{max}^{h,\alpha}} = \frac{\ln \frac{1}{1 - \zeta}}{2(1 - \sqrt{1 - \zeta})} > 1 \quad (4.35)$$

Por ejemplo, para  $\zeta = 0.35$  se tiene  $(x_f)_{max}^{V,\alpha} = 1.11 (x_f)_{max}^{h,\alpha}$ , es decir un incremento en alcance máximo del 11 %.

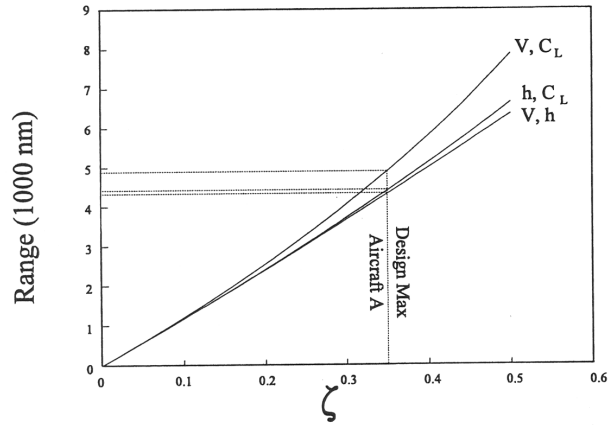


Figura 4.1: Comparación de programas de vuelo

#### 4.1.1.4 Diagrama alcance-carga de pago.

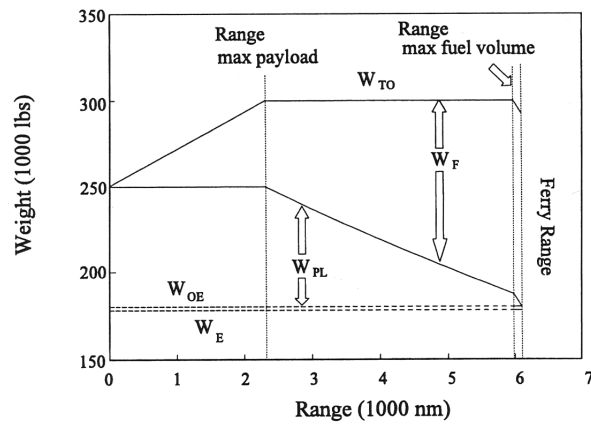
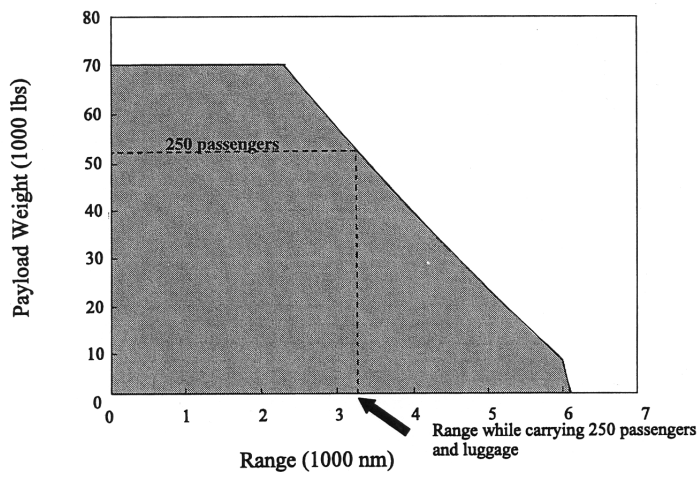


Figura 4.2: Diagrama alcance-carga de pago

El diagrama alcance-carga de pago permite analizar la influencia de la carga de pago en el alcance máximo que puede obtenerse (ver figura 4.2).

### 4.1.2 Autonomía.

La ecuación que permite calcular la autonomía es (ecuación 4.2):

$$\frac{dt}{dW} = \frac{-1}{c_E D(h, V, W)} \quad (4.36)$$

#### 4.1.2.1 Autonomía en vuelo horizontal con $V=\text{const.}$

Utilizando las variables adimensionales (4.4) se tiene la siguiente ecuación adimensional:

$$\frac{d\theta}{d\mu} = \frac{-2v^2}{v^4 + \mu^2} \quad (4.37)$$

Límites de integración:

- el tiempo adimensional varía desde  $\theta_i = 0$  hasta  $\theta_f$ ;
- el peso del avión adimensional varía desde  $\mu_i=1$  hasta  $\mu_f = 1 - \zeta$ .

Para integrar esta ecuación es necesario conocer  $v(\mu)$ , correspondiente al grado de libertad matemático que queda libre.

Al ser  $V = \text{const.}$ , se tiene  $v = \text{const.}$  La integración de la ecuación (4.37) da lugar al siguiente resultado:

Autonomía

$$\theta_f = 2 \arctan \left[ \frac{v^2 \zeta}{v^4 + (1 - \zeta)} \right] \quad (4.38)$$

**Optimización.** Autonomía máxima.

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_f}{dv} = 0 &\Rightarrow v|_{(\theta_f)_{max}} = (1 - \zeta)^{1/4} \\ (\theta_f)_{max} &= 2 \arctan \left( \frac{\zeta}{2\sqrt{1 - \zeta}} \right) \end{aligned} \quad (4.39)$$

**Variables dimensionales.**

Autonomía máxima

$$(t_f)_{max} = \frac{2E_{max}}{c_E(\rho)} \arctan \left( \frac{\zeta}{2\sqrt{1 - \zeta}} \right) \quad (4.40)$$

Al igual que en el caso del alcance, el empuje requerido viene dado por

$$T = D = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_{D_0} + k \frac{W^2}{\frac{1}{2} \rho V^2 S} \quad (4.41)$$

disminuyendo a lo largo de la trayectoria.

### 4.1.2.2 Autonomía en vuelo horizontal con $C_L = \text{const}$ .

Análogamente al caso del alcance, en función de la variable  $c = \sqrt{\frac{C_{L_{opt}}}{C_L}} = \text{const}$  definida en la Sección 4.1.1.2, la ecuación (4.37) queda de la siguiente forma:

$$\frac{d\theta}{d\mu} = \frac{-2c^2}{c^4 + 1} \frac{1}{\mu} \quad (4.42)$$

cuya integración da lugar al siguiente resultado:

$$\theta_f = \frac{2c^2}{1 + c^4} \ln \left( \frac{1}{1 - \zeta} \right) \quad (4.43)$$

**Optimización.** Autonomía máxima.

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_f}{dc} = 0 &\Rightarrow c|_{(\theta_f)_{max}} = 1 \\ (\theta_f)_{max} &= \ln \left( \frac{1}{1 - \zeta} \right) \\ C_L|_{(\theta_f)_{max}} &= C_{L_{opt}} \end{aligned} \quad (4.44)$$

**Variables dimensionales.**

Autonomía máxima

$$(t_f)_{max} = \frac{E_{max}}{c_E(\rho)} \ln \left( \frac{1}{1 - \zeta} \right) \quad (4.45)$$

Empuje requerido (el empuje requerido debe ser inferior al empuje máximo disponible)

$$T = W \frac{C_D}{C_L} \sim W \quad (4.46)$$

(al ser  $C_L = \text{const}$ , también se tiene  $C_D = \text{const}$  en el modelo ISJ).

$$T|_{(t_f)_{max}} = \frac{W}{E_{max}} \quad (4.47)$$

Velocidad de vuelo

$$V = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_L}} \sim \sqrt{W} \quad (4.48)$$

El empuje y la velocidad disminuyen a lo largo de la trayectoria.

**Comparación de ambos programas de vuelo.**

Autonomía

$$\frac{(t_f)_{max}^\alpha}{(t_f)_{max}^V} = \frac{\ln \left( \frac{1}{1 - \zeta} \right)}{2 \arctan \left( \frac{\zeta}{2\sqrt{1 - \zeta}} \right)} > 1 \quad (4.49)$$



### 4.1.2.3 Autonomía en vuelo con $V=\text{const}$ y $C_L=\text{const}$

Como ya se ha visto en la Sección 4.1.1.3, en este caso se tiene un *cruise climb*. El cambio de altitud viene dado por las ecuaciones (4.25).

Análogamente al caso del alcance, con la hipótesis  $c_E = \text{const}$ , se obtiene el siguiente resultado para la autonomía

$$t_f = \frac{1}{c_E} \frac{C_L}{C_D} \ln \frac{1}{1 - \zeta} \quad (4.50)$$

Nótese que se verifica  $x_f = V t_f$ .

#### Optimización.

El valor de  $C_L$  que hace que la autonomía sea máxima, para una carga de combustible dada, es el que hace que la eficiencia aerodinámica  $E = C_L/C_D$  sea máxima, esto es, el  $C_L$  óptimo  $C_{L_{opt}} = \sqrt{C_{D_0}/k}$ . La autonomía máxima viene dada por

$$(t_f)_{max} = \frac{E_{max}}{c_E} \ln \frac{1}{1 - \zeta} \quad (4.51)$$

#### Cruise climb con altitud inicial dada.

Si se fija la altitud inicial del *cruise climb* ( $\rho_i$ ), a partir de la ecuación (4.51) se tiene

$$(t_f)_{max} = \frac{E_{max}}{c_E(\rho_i)} \ln \frac{1}{1 - \zeta} \quad (4.52)$$

(Aunque  $V$  y  $C_L$  ya no son independientes, como se vio en la Sección 4.1.1.3, la autonomía máxima no se ve afectada por este resultado.)

### 4.1.3 Costes operacionales

Las trayectorias de vuelo en general se definen de forma que sean óptimas respecto de algún determinado criterio, por ejemplo, trayectorias de mínimo consumo de combustible, mínimo coste, mínimo impacto ambiental, etc. Para minimizar el coste, las aerolíneas definen el *Direct Operating Cost* (DOC), que es igual a la suma del coste de combustible y el coste del tiempo de vuelo. En la práctica, para definir el coste, las aerolíneas consideran un parámetro llamado *Cost Index* (CI) que representa el cociente del coste unitario del tiempo de vuelo y del coste unitario del combustible. Las aerolíneas miden estos costes en \$/hr y cents/lb, con valores representativos en el entorno 0-100 (si estos costes se miden en unidades de \$/s y \$/kg, las unidades del CI son kg/s). El caso particular  $CI=0$  corresponde a mínimo consumo de combustible. Así pues, se puede definir el DOC como

$$DOC = m_F + CI t_f \quad (4.53)$$

siendo  $m_F = m_i - m_f$  la masa de combustible consumido y  $t_f$  el tiempo de vuelo. Nótese que con esta definición el DOC se mide en kg.

#### 4.1.4 Efecto del viento

El viento afecta de forma importante a las actuaciones integrales del avión en crucero. En este curso se va a considerar un **viento horizontal constante** contenido en el plano de vuelo. Si el viento va en la dirección de vuelo del avión se tiene un **viento de cola**, siendo  $V_g = V + V_w$ ; y si va en la dirección contraria se tiene un **viento de cara**, siendo entonces  $V_g = V - V_w$ .

Se puede demostrar que para el caso de un viento horizontal constante la única ecuación que cambia en el sistema de ecuaciones (4.1) es la ecuación cinemática según el eje  $x$ , siendo ahora

$$\frac{dx}{dt} = V_g = V \pm V_w \quad (4.54)$$

y por tanto cambia tanto el alcance como la autonomía (para una carga de combustible dada).

En el caso de un avión que tiene que recorrer una distancia determinada, se tiene que los vientos de cara hacen que el tiempo de vuelo y el consumo de combustible sean mayores que cuando no hay viento, y, por otro lado, que los vientos de cola hacen que dichos parámetros sean menores. Un ejemplo de este comportamiento se tiene en el caso de la corriente de aire conocida como *jet stream*, corriente que va de oeste a este, y tiene lugar a altitudes próximas a la tropopausa.

#### 4.2 Aceleración en vuelo horizontal

Se va a analizar ahora un segmento de aceleración horizontal en el que se impone el empuje. El avión acelera desde una velocidad inicial  $V_i$  hasta una velocidad final  $V_f$ . El empuje disponible para el modelo ISJ viene dado por

$$T = T_0(\pi) \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^x \quad (4.55)$$

En general, durante la aceleración se consume poco combustible, por lo que se va a hacer la hipótesis simplificadora de que el peso del avión durante la aceleración es constante ( $W \approx \text{const}$ ).

Las ecuaciones del movimiento son ahora

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= V \\ \frac{dV}{dt} &= \frac{g}{W}(T - D) \\ L &= W \end{aligned} \quad (4.56)$$

Para acelerar el avión se requiere  $T > D$ .

De la ecuación  $L = W$  se deduce

$$V^2 C_L = \text{const} \quad (4.57)$$

relación que indica que conforme el avión se acelera, el ángulo de ataque disminuye.

Si se toma  $V$  como variable independiente se tiene

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dV} &= \frac{W}{g} \frac{V}{T - D} \\ \frac{dt}{dV} &= \frac{W}{g} \frac{1}{T - D} \\ L &= W \end{aligned} \quad (4.58)$$

VARIABLES ADIMENSIONALES:

$$v = \frac{V}{V_R}, \quad \theta = \frac{gt}{V_R E_{max}}, \quad \xi = \frac{gx}{V_R^2 E_{max}}, \quad z = \frac{T E_{max}}{W} \quad (4.59)$$

La resistencia viene dada por

$$D = \frac{W}{2E_{max}} \left( v^2 + \frac{1}{v^2} \right) \quad (4.60)$$

Ecuaciones adimensionales:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dv} &= \frac{-2v^3}{v^4 - 2zv^2 + 1} \\ \frac{d\theta}{dv} &= \frac{-2v^2}{v^4 - 2zv^2 + 1} \end{aligned} \quad (4.61)$$

La integración de estas ecuaciones proporciona la distancia recorrida y el tiempo empleado en la aceleración, esto es

$$\begin{aligned} x_a &= \frac{V_R^2 E_{max}}{g} \int_{v_i}^{v_f} \frac{-2v^3 dv}{v^4 - 2zv^2 + 1} \\ t_a &= \frac{V_R E_{max}}{g} \int_{v_i}^{v_f} \frac{-2v^2 dv}{v^4 - 2zv^2 + 1} \end{aligned} \quad (4.62)$$

Se puede demostrar que tanto  $x_a$  como  $t_a$  aumentan al aumentar la altitud de vuelo y el peso del avión.

### Ejercicio.

Un avión con turborreactor tiene una relación empuje/peso al nivel del mar  $T_0/W=0.4$  (para un valor dado de  $\pi$ ) y una carga alar  $W/S=5000$  N/m<sup>2</sup>. La polar viene dada por  $C_D=0.015+0.042C_L^2$ .

El avión acelera desde una velocidad inicial  $V_i=100$  m/s hasta una velocidad final  $V_f=250$  m/s, a altitud constante. La densidad del aire es  $\rho/\rho_0=0.5$  (la altitud es de unos 7000 m).

Se pide: Calcular la distancia necesaria  $x_a$  y el tiempo necesario  $t_a$ .

Solución:  $x_a=14148$  m,  $t_a=80.9$  s.

### 4.2.1 Desaceleración en vuelo horizontal

La desaceleración del avión se efectúa con empuje mínimo. En este curso se considera  $T = 0$ , o lo que es equivalente  $z = 0$ . Se tiene pues

$$\begin{aligned} x_a &= \frac{V_R^2 E_{max}}{g} \int_{v_i}^{v_f} \frac{-2v^3 dv}{v^4 + 1} \\ t_a &= \frac{V_R E_{max}}{g} \int_{v_i}^{v_f} \frac{-2v^2 dv}{v^4 + 1} \end{aligned} \quad (4.63)$$

### Ejercicio.

El mismo avión del ejercicio anterior desacelera desde una velocidad inicial  $V_i=250$  m/s hasta una velocidad final  $V_f=100$  m/s, a la misma altitud.

Se pide: Calcular la distancia necesaria  $x_a$  y el tiempo necesario  $t_a$ .

Solución:  $x_a=48158$  m,  $t_a=275$  s.

### 4.3 Actuaciones integrales en planeo

Se considera el planeo desde una altitud inicial  $h_i$  hasta una altitud final  $h_f < h_i$ , ambos valores conocidos.

#### Hipótesis. Ecuaciones.

Hipótesis de planeo:

- empuje nulo ( $T = 0$ ),
- peso constante ( $W = \text{const}$ ),
- ángulo de trayectoria muy pequeño:  $\gamma \ll 1$ ,
- aceleración normal a la trayectoria despreciable ( $\dot{\gamma} \approx 0$ ).

Ecuaciones del vuelo de planeo (vuelo simétrico en un plano vertical):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= V \\ \frac{dh}{dt} &= V\gamma \\ \frac{W}{g} \frac{dV}{dt} &= -D(h, V, L) - W\gamma \\ 0 &= L - W \end{aligned} \tag{4.64}$$

En este problema se tiene 1 grado de libertad matemático.

Se van a considerar tres leyes de pilotaje:

- 1)  $C_L = \text{const}$ .
- 2)  $V = \text{const}$ .
- 3)  $V_e = \text{const}$ .

#### 4.3.1 Planeo con $C_L = \text{const}$

Al ser  $C_L = \text{const}$ , también se tiene  $C_D = \text{const}$  en el modelo ISJ, y en consecuencia

$$E = \frac{C_L}{C_D} = \frac{L}{D} = \frac{W}{D} = \text{const} \tag{4.65}$$

#### Velocidad de vuelo.

A partir de la ecuación  $L = W = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L$  se obtiene la velocidad de vuelo  $V(h)$

$$V = \frac{V_{ref}}{\sqrt{C_L}} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \tag{4.66}$$

siendo

$$V_{ref} = \sqrt{\frac{2W}{\rho_0 S}}, \quad \sigma = \frac{\rho}{\rho_0} \tag{4.67}$$

donde  $\rho_0$  es la densidad ISA al nivel del mar.

Nótese que el avión se desacelera en el planeo, como consecuencia del aumento de la densidad.

### Ángulo de descenso.

El ángulo de descenso  $\gamma_d(h)$  se define como  $\gamma_d = -\gamma$ , y se obtiene a partir de las ecuaciones (4.64)

$$\gamma_d = \frac{1}{E} \left( 1 + \frac{1}{2g} \frac{dV^2}{dh} \right)^{-1} \quad (4.68)$$

donde se ha utilizado la relación

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dV^2}{dh} \gamma \quad (4.69)$$

y utilizando ahora la velocidad de vuelo dada por la ecuación (4.66) se tiene

$$\gamma_d = \frac{1}{E} \left( 1 - \frac{V_{ref}^2}{2gC_L} \frac{1}{\sigma^2} \frac{d\sigma}{dh} \right)^{-1} \quad (4.70)$$

### Velocidad de descenso.

La velocidad de descenso  $V_d(h)$  se define como  $V_d = -V\gamma = V\gamma_d$ , y se obtiene a partir de las ecuaciones (4.66, 4.70)

$$V_d = \frac{V_{ref}}{E\sqrt{C_L}} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \left( 1 - \frac{V_{ref}^2}{2gC_L} \frac{1}{\sigma^2} \frac{d\sigma}{dh} \right)^{-1} \quad (4.71)$$

### Distancia horizontal recorrida.

Tomando  $h$  como variable independiente, se tiene

$$x_f = - \int_{h_i}^{h_f} \frac{1}{\gamma_d(h)} dh = E \left[ (h_i - h_f) + \frac{V_{ref}^2}{2gC_L} \left( \frac{1}{\sigma_i} - \frac{1}{\sigma_f} \right) \right] = E \left[ (h_i - h_f) + \frac{V_i^2 - V_f^2}{2g} \right] \quad (4.72)$$

Esta expresión relaciona la distancia horizontal recorrida con la pérdida de energías potencial y cinética durante el planeo.

### Tiempo de planeo.

Tomando  $h$  como variable independiente, se tiene

$$\begin{aligned} t_f &= - \int_{h_i}^{h_f} \frac{1}{V_d(h)} dh = \frac{E\sqrt{C_L}}{V_{ref}} \int_{h_i}^{h_f} (-\sqrt{\sigma}) dh + \frac{EV_{ref}}{g\sqrt{C_L}} \left( \frac{1}{\sqrt{\sigma_i}} - \frac{1}{\sqrt{\sigma_f}} \right) \\ &= \frac{E\sqrt{C_L}}{V_{ref}} \int_{h_i}^{h_f} (-\sqrt{\sigma}) dh + E \frac{V_i - V_f}{g} \end{aligned} \quad (4.73)$$

#### 4.3.1.1 Planeo estacionario con $C_L = \text{const}$

Ahora se introduce la simplificación  $\dot{V} \approx 0$ . Las ecuaciones (4.64) se reducen a

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= V \\ \frac{dh}{dt} &= V\gamma \\ D(h, V, L) + W\gamma &= 0 \\ L &= W \end{aligned} \quad (4.74)$$

### Velocidad de vuelo.

La velocidad de vuelo sigue definida por la ecuación (4.66).

### Ángulo de descenso.

$$\gamma_d = -\gamma = \frac{1}{E} = \text{const} \quad (4.75)$$

### Velocidad de descenso.

$$V_d = V(h)\gamma_d = \frac{V_{ref}}{E\sqrt{C_L}} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \quad (4.76)$$

### Distancia horizontal recorrida.

$$x_f = E(h_i - h_f) \quad (4.77)$$

### Tiempo de planeo.

$$t_f = \frac{E\sqrt{C_L}}{V_{ref}} \int_{h_i}^{h_f} (-\sqrt{\sigma}) dh \quad (4.78)$$

### Optimización.

Distancia horizontal máxima. La distancia horizontal máxima se tiene para  $E$  máxima

$$(x_f)_{max} = E_{max}(h_i - h_f) \quad (4.79)$$

siendo además

$$C_L|_{(x_f)_{max}} = C_{L_{opt}} \quad (4.80)$$

Esta condición de vuelo se corresponde con el *flattest glide*.

Tiempo de planeo máximo. El tiempo de planeo máximo se tiene para  $E\sqrt{C_L}$  máxima

$$(t_f)_{max} = \frac{3^{3/4}}{2} \frac{E_{max}\sqrt{C_{L_{opt}}}}{V_{ref}} \int_{h_i}^{h_f} (-\sqrt{\sigma}) dh \quad (4.81)$$

siendo además

$$C_L|_{(t_f)_{max}} = \sqrt{3}C_{L_{opt}} \quad (4.82)$$

Esta condición de vuelo se corresponde con el *slowest sink*.

## 4.3.2 Planeo con $V=\text{const}$

Al ser  $V=\text{const}$  se tiene una condición de planeo estacionario. Las ecuaciones del movimiento son las ecuaciones (4.74).

En función de la variable adimensional

$$v = \frac{V}{V_{R_0}}, \quad V_{R_0} = \sqrt{\frac{2W}{\rho_0 S}} \left( \frac{k}{C_{D_0}} \right)^{1/4} \quad (4.83)$$

se tiene

$$D = \frac{W}{2E_{max}} \left( \sigma v^2 + \frac{1}{\sigma v^2} \right) \quad (4.84)$$

### Ángulo de descenso.

El ángulo de descenso  $\gamma_d(h)$  viene dado por

$$\gamma_d = -\gamma = \frac{D(h, V, W)}{W} = \frac{1}{2E_{max}} \left( \sigma v^2 + \frac{1}{\sigma v^2} \right) \quad (4.85)$$

### Velocidad de descenso.

La velocidad de descenso  $V_d(h)$  viene dada por

$$V_d = V\gamma_d = V_{R_0} \frac{1}{2E_{max}} \left( \sigma v^3 + \frac{1}{\sigma v} \right) \quad (4.86)$$

### Distancia horizontal recorrida y tiempo de vuelo.

Tomando  $h$  como variable independiente se tiene que la distancia horizontal recorrida y el tiempo de vuelo vienen dados por

$$\begin{aligned} x_f &= \int_{h_i}^{h_f} -\frac{1}{\gamma_d(h)} dh = -2E_{max} \int_{h_i}^{h_f} \frac{\sigma v^2}{\sigma^2 v^4 + 1} dh \\ t_f &= \int_{h_i}^{h_f} -\frac{1}{V_d(h)} dh = -\frac{2E_{max}}{V_{R_0}} \int_{h_i}^{h_f} \frac{\sigma v}{\sigma^2 v^4 + 1} dh = \frac{x_f}{V} \end{aligned} \quad (4.87)$$

### 4.3.3 Planeo con $V_e = \text{const}$

A partir de la definición de velocidad equivalente ( $\rho V^2 = \rho_0 V_e^2$ ), se obtiene la siguiente ley para la velocidad de vuelo  $V(h)$

$$V = V_e \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \quad (4.88)$$

A partir de la ecuación  $L = W = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L = \frac{1}{2}\rho_0 V_e^2 S C_L$  se obtiene que el planeo con  $V_e = \text{const}$  es un planeo con  $C_L = \text{const}$ . Por tanto, todo el análisis desarrollado en la Sección 4.3.1 es aplicable aquí sin más que hacer

$$\sqrt{C_L} = \frac{V_{ref}}{V_e} \quad (4.89)$$

### 4.3.4 Continuous Descent Approach

El objetivo del *Continuous Descent Approach* (CDA) es descender y desacelerar de forma continua, de manera que se minimice el impacto tanto económico como ambiental, manteniendo el empuje tan pequeño como sea posible durante el mayor tiempo posible.

## 4.4 Actuaciones integrales en subida

Se considera una subida desde una altitud inicial  $h_i$  hasta una altitud final  $h_f > h_i$ , ambos valores conocidos.

### Hipótesis. Ecuaciones.

Hipótesis:

- peso constante ( $W = \text{const}$ ),
- ángulo de trayectoria muy pequeño:  $\gamma \ll 1$ ,
- aceleración normal a la trayectoria despreciable ( $\dot{\gamma} \approx 0$ ).

La hipótesis  $W = \text{const}$  permite simplificar el problema. La ecuación de la masa queda desacoplada del resto, por lo que el consumo de combustible durante la subida puede calcularse de forma aproximada a posteriori.

Ecuaciones del vuelo de subida (vuelo simétrico en un plano vertical):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= V \\ \frac{dh}{dt} &= V\gamma \\ \frac{W}{g} \frac{dV}{dt} &= T - D(h, V, L) - W\gamma \\ 0 &= L - W \end{aligned} \tag{4.90}$$

En este problema se tienen 2 grados de libertad matemáticos.

Ley de pilotaje. De entre las múltiples posibilidades que se tienen para cerrar los 2 grados de libertad matemáticos del problema, en este curso se eligen las 2 ligaduras de vuelo siguientes:

- 1)  $T = T(h)$  conocido. En el modelo ISJ esta ligadura es consecuencia de hacer  $\pi = \text{const}$ .
- 2)  $V = V(h)$  conocido. Esta ley de velocidades es consecuencia de hacer, por ejemplo,  $M = \text{const}$ ,  $CAS = \text{const}$ ,  $V_e = \text{const}$ ,  $C_L = \text{const}$ , o también puede representar una ley óptima de velocidades obtenida por algún otro medio.

### 4.4.1 Subida no estacionaria

#### Ángulo de subida.

El ángulo de subida  $\gamma(h)$  se obtiene a partir de las ecuaciones (4.90)

$$\gamma = \frac{T - D}{W} \left( 1 + \frac{1}{2g} \frac{dV^2}{dh} \right)^{-1} \tag{4.91}$$

donde se ha utilizado la relación

$$\frac{dV}{dt} = V \frac{dV}{dh} \gamma \tag{4.92}$$

El término  $T - D$  se llama exceso de empuje, y el término  $1 + \frac{1}{2g} \frac{dV^2}{dh}$  se llama factor de aceleración.

#### Velocidad de subida.

La velocidad de subida  $V_c(h)$  se define como  $V_c = V\gamma$ , y se obtiene a partir de la ecuación (4.91)

$$V_c = \frac{V(T - D)}{W} \left( 1 + \frac{1}{2g} \frac{dV^2}{dh} \right)^{-1} \tag{4.93}$$



El término  $V(T - D)$  se llama exceso de potencia.

#### Distancia horizontal recorrida, tiempo de subida y consumo de combustible.

Tomando  $h$  como variable independiente, se tiene

$$x_c = \int_{h_i}^{h_f} \frac{1}{\gamma(h)} dh \quad (4.94)$$

$$t_c = \int_{h_i}^{h_f} \frac{1}{V_c(h)} dh \quad (4.95)$$

$$W_{F_c} = \int_{h_i}^{h_f} \frac{c_E(h)T(h)}{V_c(h)} dh \quad (4.96)$$

#### 4.4.2 Subida casi estacionaria

Ahora se introduce la simplificación  $\dot{V} \approx 0$ . Las ecuaciones (4.90) se reducen a

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= V \\ \frac{dh}{dt} &= V\gamma \\ T(h) - D(h, V, L) - W\gamma &= 0 \\ L &= W \end{aligned} \quad (4.97)$$

Las expresiones para el ángulo de subida y la velocidad de subida se reducen a

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{T(h) - D(h, V, W)}{W} \\ V_c &= V(h) \frac{T(h) - D(h, V, W)}{W} \end{aligned} \quad (4.98)$$

#### Variables adimensionales.

En función de las variables adimensionales  $v(h)$  y  $z(h)$  definidas por

$$v = \frac{V}{V_R}, \quad z = \frac{TE_{max}}{W} \quad (4.99)$$

se tiene

$$\gamma = \frac{1}{E_{max}} \left[ z - \frac{1}{2} \left( v^2 + \frac{1}{v^2} \right) \right] \quad (4.100)$$

$$\frac{V_c}{V_R} = \frac{1}{E_{max}} v \left[ z - \frac{1}{2} \left( v^2 + \frac{1}{v^2} \right) \right] \quad (4.101)$$

Para el modelo ISJ se tiene

$$z = z_0 \sigma^x, \quad c_E = c_{E_0} \sigma^y, \quad z_0 = \frac{T_0(\pi)E_{max}}{W}, \quad c_{E_0} = const \quad (4.102)$$

La distancia horizontal recorrida, el tiempo de subida y el consumo de combustible vienen dados por

$$x_c = E_{max} \int_{h_i}^{h_f} \left[ z_0 \sigma^x - \frac{1}{2} \left( v^2 + \frac{1}{v^2} \right) \right]^{-1} dh \quad (4.103)$$

$$t_c = \frac{E_{max}}{V_{R_0}} \int_{h_i}^{h_f} \frac{\sqrt{\sigma}}{v} \left[ z_0 \sigma^x - \frac{1}{2} \left( v^2 + \frac{1}{v^2} \right) \right]^{-1} dh \quad (4.104)$$

$$W_{F_c} = \frac{W c_{E_0} z_0}{V_{R_0}} \int_{h_i}^{h_f} \frac{\sigma^{x+y+1/2}}{v} \left[ z_0 \sigma^x - \frac{1}{2} \left( v^2 + \frac{1}{v^2} \right) \right]^{-1} dh \quad (4.105)$$

### Subida con $C_L = \text{const}$

En este caso la ley de velocidades es

$$V = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_L}} \quad (4.106)$$

y la ley de velocidades adimensional es

$$v = \sqrt{\frac{C_{L_{opt}}}{C_L}} = \text{const} \quad (4.107)$$

### Subida con $V_e = \text{const}$

En este caso la ley de velocidades es

$$V = V_e \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}} \quad (4.108)$$

y la ley de velocidades adimensional es

$$v = \frac{V_e}{V_{R_0}} = \text{const} \quad (4.109)$$

## 4.4.3 Subida CAS/Mach

La subida CAS/Mach utilizada habitualmente por los aviones comerciales está formada por 2 segmentos:

- 1) segmento con  $CAS = \text{const}$ , que define una ley de velocidades  $V = V_C(h)$ .
- 2) segmento con  $M = \text{const}$ , que define una ley de velocidades  $V = V_M(h)$ .

El cambio de un segmento a otro se produce a la **altitud de transición**, que viene definida por la ecuación

$$V_C(h) = V_M(h) \quad (4.110)$$

**Optimización.** La optimización de la subida CAS/Mach consiste en encontrar los valores de  $CAS$  y  $M$  que minimizan o maximizan un determinado objetivo, por ejemplo, mínimo consumo de combustible.